Devoir n°8 - Nombres Complexes - TS

15 février 2016 - 2h

Exercice 1 (1 pt) :

1. Ecrire sous forme algébrique le nombre : $a = 2e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - 3e^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
2. Déterminer la forme exponentielle du nombre : $b = -3(\cos(\dfrac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\dfrac{\pi}{6}))$

Exercice 2 (3 pts) : On donne les nombres complexes : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{6} - \mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$

1. Déterminer la forme exponentielle de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$, et en déduire la valeur exacte de $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{12})$

Exercice 3 (2,5 pts) : Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble des complexes :

(E_1) : $\mathrm{i}\bar{z} + 3z = 2 - 2\mathrm{i}$

(E_2) : $3z^2 - 2z = -1$

Exercice 4 (4 pts) :

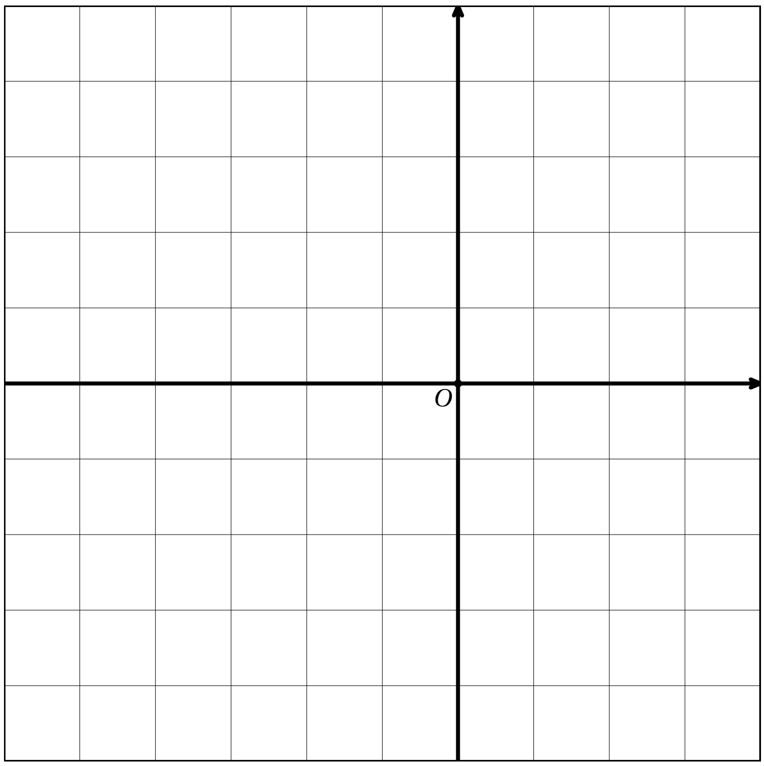
Représenter les ensembles suivants après avoir brièvement justifié :

$\mathscr{E}_1 = \{M(z) \ / \ |z + 3 + \mathrm{i}| = 2\}$

$\mathscr{E}_2 = \{M(z) \ / \ |z + 2 - \mathrm{i}| = |z - 4\mathrm{i}|\}$

$\mathscr{E}_3 = \left\{M(z) \ / \ \arg(z + 2 - \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{6} \ \ (\pi)\right\}$

$\mathscr{E}_4 = \left\{M(z) \ / \ \arg\left(\dfrac{z + 3 + \mathrm{i}}{z - 1 + 2\mathrm{i}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \ \ (2\pi)\right\}$



Exercice 5 (4,5 pts) : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soit la fonction f qui, à tout point M, d'affixe $z \neq 2\mathrm{i}$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{2z}{z-2\mathrm{i}}$$

1. On pose $z = x + iy$ avec $x,\, y \in \mathbb{R}$ et $z' = x' + iy'$ avec $x',\, y' \in \mathbb{R}$.
   Vérifier que $x' = \dfrac{2(x^2+y^2-2y)}{x^2+(y-2)^2}$ et $y' = \dfrac{4x}{x^2+(y-2)^2}$.
2. Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un réel ; déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.
3. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que z' soit un imaginaire pur ; déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$.

Exercice 6 (5 pts) :

Partie A : On considère l'équation $(E) : z^4 = -4$, où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si z est solution de (E) alors $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de (E).
2. Soit le nombre complexe $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
   a) Ecrire z_0 sous forme exponentielle.
   b) Vérifier que z_0 est solution de (E).
3. D'après les questions précédentes, en déduire trois autres solutions de l'équation (E).

Partie B : Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Les points A, B, C et D ont pour affixes respectives :

$$z_A = 1+\mathrm{i}, \qquad z_B = -1+\mathrm{i}, \qquad z_C = -1-\mathrm{i}, \qquad z_D = 1-\mathrm{i}.$$

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -1+\sqrt{3}$; montrer que le triangle BCE est équilatéral.
2. Soit F le point d'affixe $z_F = -\mathrm{i}(1+\sqrt{3})$; montrer que les points A, E et F sont alignés.
   (on pourra vérifier que $\dfrac{z_E - z_A}{z_F - z_A}$ *est un réel)*