Devoir n$^{\text{o}}$11 - Intégration - TS

24 mars 2017 - 2h

Exercice 1 (2,5 pts) : Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \text{ sur } \mathbb{R} \qquad\qquad g(x) = \frac{x}{4-x^2} \text{ sur } [-1;1]$$

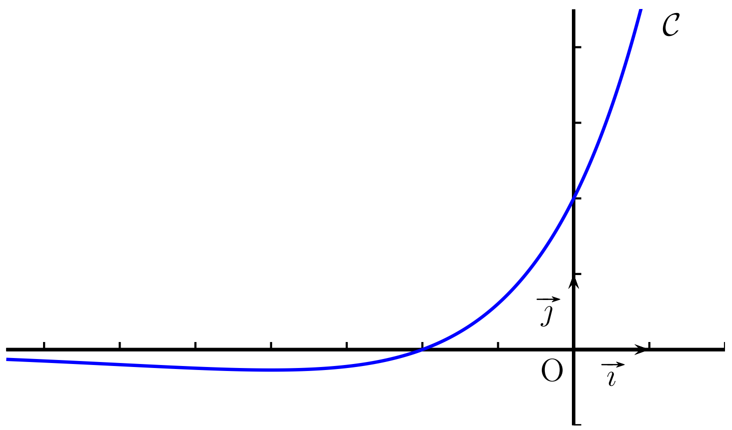
Exercice 2 (3,5 pts) : Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

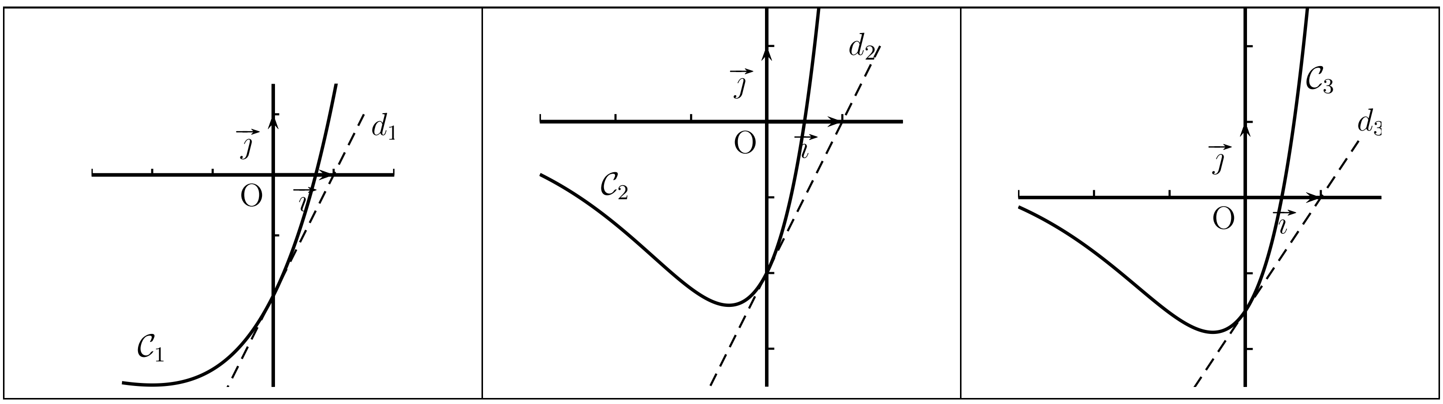
$$I = \int_{-1}^{0} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx \qquad\qquad J = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)(\cos x)^2\,dx$$

Exercice 3 (6 pts) : Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   a) À l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F. Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la **partie A** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

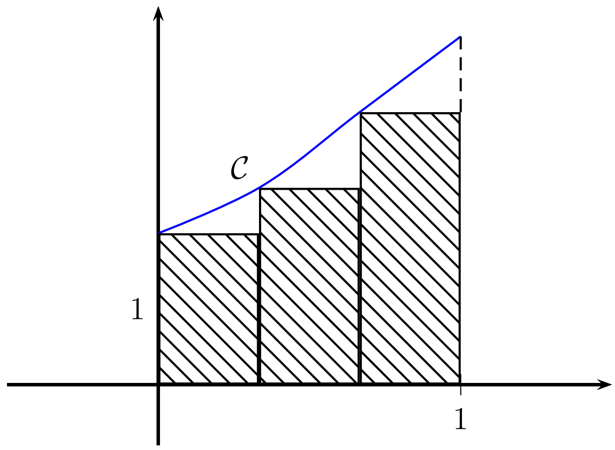
$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe $\mathcal{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.
   a) Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
   b) En déduire une validation de la conjecture précédente.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   a) Interpréter géométriquement le réel I.
   b) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$. Vérifier que $f = 2\,(u'v + uv')$.
   c) En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.
3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ — Affecter à s la valeur $s + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a) Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.



b) Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

Exercice 4 (8 pts) : Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^2 e^{-2nx}$.
On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_1(x) = x^2 e^{-2x}$$
On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.
   a) Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
   d) Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.
2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$. En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.
   a) Interpréter graphiquement la quantité I_n.
   b) Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.
2. a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x)$$
   b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$
   c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).
3. Soit n un entier naturel non nul.
   a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$,
$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$
   b) En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.