Devoir n°12 - Lois de Probabilités - TS

7 avril 2017 - 1h

Exercice 1 (12 pts) : *Les valeurs approchées des résultats seront données à* 10^{-4} *près.*
Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A : Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

— à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
— à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les évènements suivants :

— A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
— B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
— D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.
   a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
   b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
   c) L'ampoule tirée est sans défaut. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.
2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.
   Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut. (justifier)

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a, $P(T \leqslant a) = \displaystyle\int_0^a \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$.
   a) Montrer que $P(T \geqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.
   b) Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a
   $$P_{T\geqslant t}(T \geqslant t + a) = P(T \geqslant a)$$
2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.
   a) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
   b) Calculer la probabilité $P(T \geqslant 5\,000)$.
   c) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C : L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
   (*on rappelle que* $I = [p - 1.96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1.96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$)
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Exercice 2 (8 pts) : *Cet exercice est un VRAI-FAUX à justifier.*

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

Une enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ.

On sait que le service statistique indique que $P(D \geqslant 48) = 0{,}797\,7$.

Proposition 1 (2 pts) : $\boldsymbol{\sigma = 2{,}4}$.
(on utilisera la variable aléatoire centrée réduite associée)

Proposition 2 (1 pt) : la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 **et** 52 **mois est de 0,0365.**

Proposition 3 (1,5 pts) : la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 **mois fonctionne encore au moins** 6 **mois est de 0,0478.**

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que le service statistique indique que $P(0 \leqslant T \leqslant 24) = 0{,}03$.

Proposition 4 (1,5 pts) : $\boldsymbol{\lambda = 0{,}00127}$.
(on résoudra une équation)

Proposition 5 (2 pts) : On admet que les évènements $(D \geqslant 48)$ et $(T \geqslant 48)$ sont indépendants.
La probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 **mois est de 0,7505.**