Devoir n°13 - Espace et Fonctions - TS - C'est le dernier !

12 mai 2017 - 2h

Exercice 1 (3 pts) : *Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer la bonne réponse. Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.*

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.
Le plan (P) a pour équation $x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 + t + 2t' \\ y & = & -t - 2t' \\ z & = & -1 - t + 3t' \end{array}\right.$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 + t \\ y & = & -t \\ z & = & -1 - t \end{array}\right.$

On donne les points de l'espace $M(-1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et $N(1\ ;\ -2\ ;\ 9)$.

1. a) La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $A(-8\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   b) La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
   c) La droite (D) est une droite du plan (P).
   d) La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

2. a) La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
   b) La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
   c) La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
   d) La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

3. a) Les plans (P) et (S) sont parallèles.
   b) La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & -2 - t \\ z & = & -3 - t \end{array}\right.$
   est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
   c) Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
   d) Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

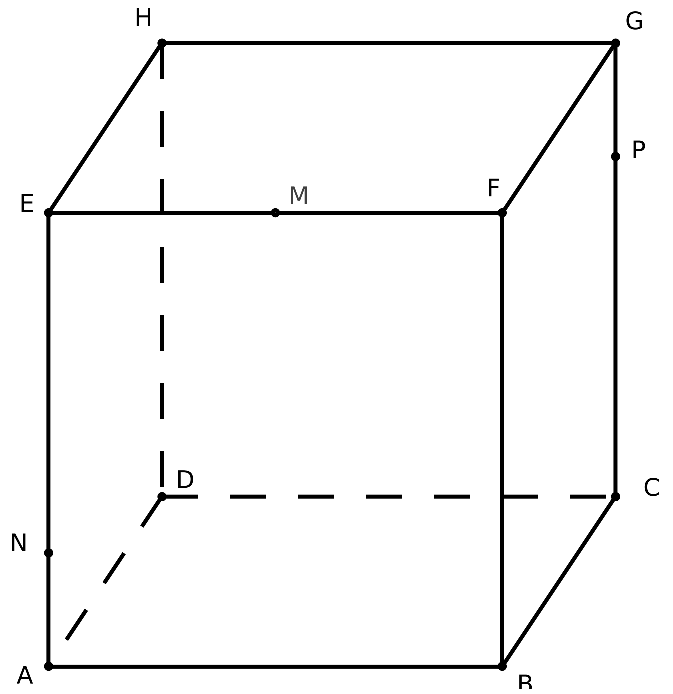
Exercice 2 (6 pts) : On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(0\ ;\ 4\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 3\ ;\ 0)$, $C(2\ ;\ -1\ ;\ -2)$ et $D(7\ ;\ -1\ ;\ 4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$.
   a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soient $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
   a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
   b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique
   $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -4t - 2 \\ y & = & t \\ z & = & 3t + 2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$
   c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 3 (2,5 pts) : On considère un cube $ABCDEFCH$.

On note M le milieu du segment $[EF]$, N le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{AN}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et P le point tel que $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CG}$.

Construire la section du cube par le plan (MNP).



Exercice 4 (8,5 pts) : Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A : Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$; montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ du plan.

1. a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
   b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.
2. On a représenté les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e). Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs de m.
4. a) On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$. Hachurer D_2 sur le graphique.
   b) Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_{\mathrm{e}}$, $\mathcal{C}_{-\mathrm{e}}$, l'axe (Oy) et la droite Δ_a d'équation $x = a$. On désigne par $\mathcal{A}(a)$ l'aire de cette partie du plan, exprimée en unités d'aire.
   Démontrer que pour tout réel a positif : $\mathcal{A}(a) = 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e}^{1-a}$.
   En déduire la limite de $\mathcal{A}(a)$ quand a tend vers $+\infty$.