Correction du devoir n°3 - TS

18

Exo 1 : 1) $u_n = -2n^3 + n - 7 - \frac{15}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{-15}{n} = 0$

$\lim_{n\to+\infty} (-2n^3 + n - 7) = \lim (-2n^3) = -\infty$
polynôme de degré 3

Par Somme $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$

2) $v_n = \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow -1/n^2 \leq 1/n^2 \cos(1/n) \leq \frac{1}{n^2}$ $\quad (n^2 > 0)$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{n^2} \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$

or $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

D'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 0}$

3) $t_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$t_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1$

$-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Par Somme $\boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = -1}$

4) $s_n = \sqrt{n} - \sin n$ $(n \in \mathbb{N})$

$-1 \leq \sin n \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \geq -\sin n \geq -1$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} + 1 \geq \sqrt{n} - \sin n \geq \sqrt{n} - 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{n} - 1 \leq s_n$

or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} - 1 = +\infty$

Par Comparaison $\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty}$

Exo 2 : $u_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ 12

1) $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

2) Soit $\alpha > 0$ $\quad u_n < \alpha \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n^2} < \alpha \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\alpha}$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ ~~strictement~~ décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ ~~strictement~~ croissante sur $[0;+\infty[$

Donc $\forall \alpha > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\left(n_0 = E\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) + 1\right)$ ~~tel que~~

$n \geq n_0 \Rightarrow u_n < \alpha$ soit $-\alpha < u_n < \alpha$ $\quad (u_n > 0)$

Par définition $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0

/9

Ex3 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N})$

1) ⓐ

n	0	1	2	3
u	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \simeq 1{,}8340$

Pour $n=3$, l'algorithme affiche $\boxed{1{,}8340}$ 0,5

ⓑ l'algorithme calcule et affiche u_n pour n donné 0,5

ⓒ d'après le tableau, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semble croissante et converger vers 2 0,5

2) Par récurrence, on veut montrer que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leq 2}$ 0,25

- initialisation : pour $n=0$ $u_0 = 1$ $0 < 1 \leq 2$ vérifié 0,5
- hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_k \leq 2$

alors $0 < 2u_k \leq 4$

$\Rightarrow 0 < \sqrt{2u_k} \leq \sqrt{4}$ $\quad x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ 1,25

$\Rightarrow 0 < u_{k+1} \leq 2$ vérifié au rang $k+1$.

- conclusion : $\begin{cases} \text{la propriété est vraie au rang } n=0 \\ \text{elle est héréditaire} \end{cases}$ 0,5

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 2$

3) $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2u_n}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{u_n}}$ $\quad$ or $u_n \leq 2 \Rightarrow \sqrt{u_n} \leq \sqrt{2} \Rightarrow 1 \leq \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{u_n}}$

donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq u_n$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante 1,5

4) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers ℓ 0,75

5) ⓐ $0 < u_n \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \boxed{0 < \ell \leq 2}$ 0,5

ⓑ $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$ par passage à la limite $\ell = \sqrt{2\ell}$

$\ell = \sqrt{2\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 2\ell \Leftrightarrow \ell(\ell-2) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\ell = 0}$ ou $\ell = 2$ 1

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2

$\to$ $(u_n) \nearrow$
$u_0 = 1$
$u_n \geq 1$
$\ell \geq 1$

ⓒ

début
$n \leftarrow 0$;
$u \leftarrow 1$;
Tant que $u \leq 1{,}999$
$\quad u \leftarrow \sqrt{2u}$;
$\quad n \leftarrow n+1$;
fin tant que
afficher n
fin

0,75