Devoir n°5 - Continuité, Dérivabilité et TVI - TS

28 novembre 2016 - 1h

Exercice 1 (5 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (15 pts) : Partie A : Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^3 - 3x - 3$$

1. Etudier le sens de variation de g sur $[0; +\infty[$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$ que l'on note α.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}, puis une valeur approchée à 10^{-1}.
3. Déterminer le signe de g sur $[0; +\infty[$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $I = [0; 1[\cup]1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de I et préciser ses asymptotes (s'il y a lieu).
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 2x$.
   Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$; que peut-on en déduire ?