Devoir n°6 - Fonction Exponentielle - TS

16 décembre 2016 - 2h

Exercice 1 2 pts) : Restitution Organisée de Connaissances

Prérequis : On sait que $\exp(0) = 1$ et que pour tous x et $y \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp(nx) = (\exp(x))^n$, quelque soit $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (10 pts) : On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A
Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Dresser le tableau de variation complet de g.
3. En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x).$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$. Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

Partie C

1. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

Partie D
Nous avons vu à la partie B que f s'annule en un unique réel α compris entre -1 et 0.

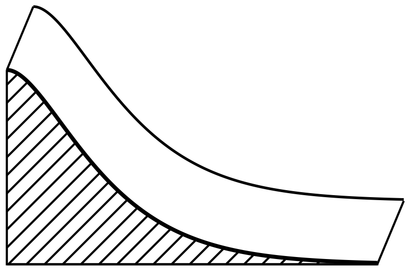
On considère l'algorithme suivant :

Variables	a réel et k entier naturel
Entrée	Saisir la valeur de k
Initialisation	a prend la valeur -1
Traitement	Tant que $f(a + 10^{-k}) < 0$ faire a prend la valeur $a + 10^{-k}$ Fin tant que
Sortie	Afficher a

1. Quelle valeur affiche l'algorithme ci-dessus lorsque l'on entre $k = 1$? $k = 2$? $k = 3$?
2. De façon plus générale quel est le rôle de cet algorithme ?

Exercice 3 (5,5 pts) :

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

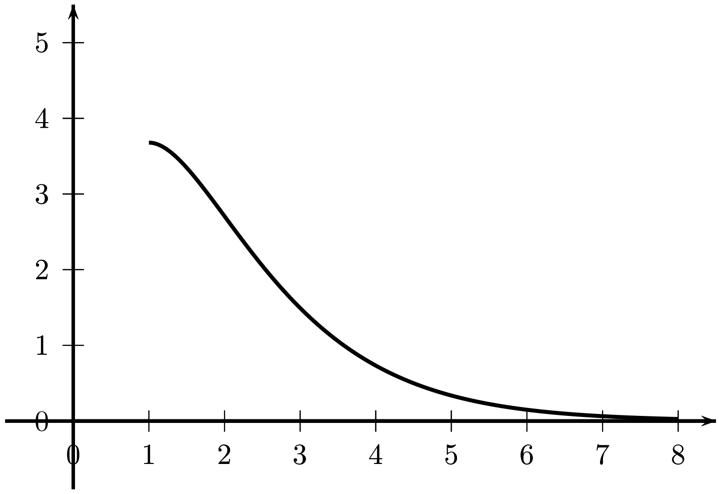


Partie A : Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1~;~8]$ par

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$$

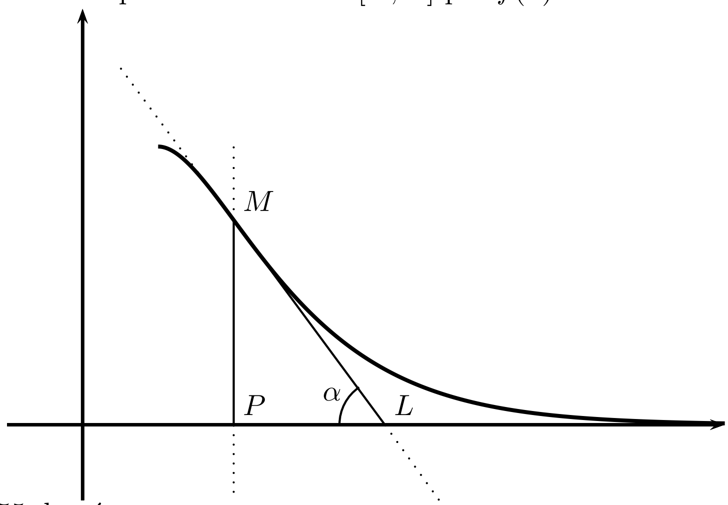
où a et b sont **deux entiers naturels**.
La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-contre dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer b.
2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer a.

Partie B : Une contrainte à vérifier
On admet que la fonction f introduite **en Partie A** est définie pour tout réel $x \in [1~;~8]$ par $f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}$.

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On admet que , pour tout x de l'intervalle $[1~;~8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1~;~8]$.
2. Soit x un réel de l'intervalle $]1~;~8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.
3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

Exercice 4 (2,5 pts) : Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = \mathrm{e}^x - kx$$

où k est un réel quelconque.

Existe-t-il un réel k tel que l'axe des abscisses soit tangent à $\mathcal{C}_k$, la courbe représentative de la fonction f_k ?
Si oui, déterminer k ainsi que les coordonnées du point de tangence.
(Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans la notation)