Devoir n°7 - Fonction Ln - TS

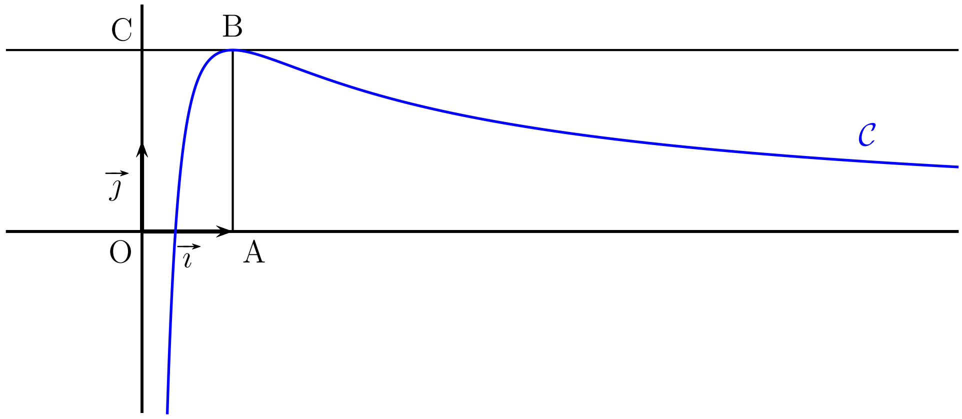
16 janvier 2017 - 1h

Exercice 1 (3 pts) : Restitution Organisée de Connaissances

Prérequis : On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$ et que pour tout $t \in]0; +\infty[$, on a $\ln(\dfrac{1}{t}) = -\ln(t)$.

Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.

Exercice 2 (4 pts) : Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1\,;\,0)$, $(1\,;\,2)$, $(0\,;\,2)$;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}.$$

1. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$ (justifier).
2. Déterminer pour tout réel strictement positif, la fonction f', fonction dérivée de f.
3. En déduire les réels a et b.

Exercice 3 (13 pts) :

Partie A : Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = x^2 - 2 + \ln x.$$

1. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$; on note α cette solution.
   b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x.
4. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$.

Partie B : On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C : Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note :
- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Montrer que la distance AM est donnée par $\mathrm{A}M = \sqrt{f(x)}$.
2. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   a) Justifier que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   b) Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées.
   c) Montrer que $\mathrm{AP} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.