

Devoir n°13 - Intégration - Probabilités - TS

14 mai 2019 - 2h

Exercice 1 (2 pts) : *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On ne demande pas de justification. Il est attribué 1 point si la réponse est exacte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

Question 1

Le césium 137 est un élément radioactif qui constitue une des principales sources de radioactivité des déchets des réacteurs nucléaires. Le temps T , en années, durant lequel un atome de césium 137 reste radioactif peut être assimilé à une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{\ln 2}{30}$.

Quelle est la probabilité qu'un atome de césium 137 reste radioactif durant au moins 60 ans ?

- a. 0,125 b. 0,25 c. 0,75 d. 0,875

Question 2

Une entreprise souhaite obtenir une estimation de la proportion de personnes de plus de 60 ans parmi ses clients, au niveau de confiance de 95 %, avec un intervalle d'amplitude inférieure à 0,05.

Quel est le nombre minimum de clients à interroger ?

- a. 400 b. 800 c. 1 600 d. 3 200

Exercice 2 (6 pts) : Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Une étude du fonctionnement des machines a permis d'établir les résultats suivants :

- 96 % de la production journalière est vendable.
- La machine A fournit 60 % de la production journalière.
- La proportion de billes vendables parmi la production de la machine A est 98 %.

On choisit une bille au hasard dans la production d'un jour donné. On définit les événements suivants :

A : « la bille a été fabriquée par la machine A » ;

B : « la bille a été fabriquée par la machine B » ;

V : « la bille est vendable ».

1. Déterminer la probabilité que la bille choisie soit vendable et provienne de la machine A.
2. Justifier que $P(B \cap V) = 0,372$ et en déduire la probabilité que la bille choisie soit vendable sachant qu'elle provient de la machine B.
3. Un technicien affirme que 70 % des billes non vendables proviennent de la machine B.
A-t-il raison ?

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$. Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.
2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ' , σ' étant un réel strictement positif.
Sachant que $P(0,9 \leq Y \leq 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millièmme de σ' .

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

- Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
 - On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3} .
 - Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?
- Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

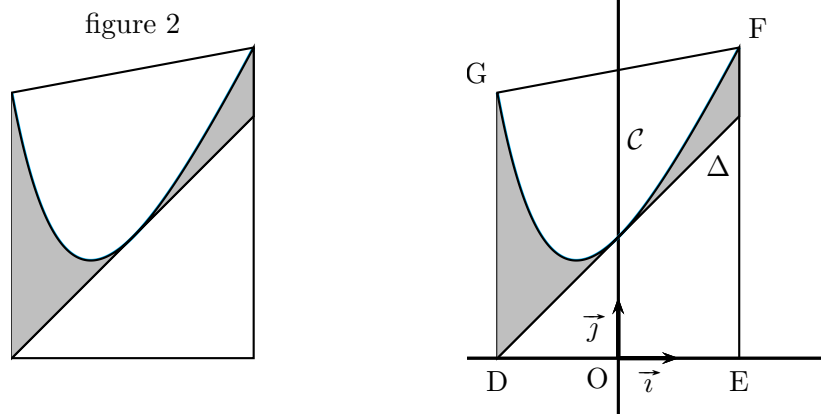
Exercice 3 (4 pts) : Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = e^{-x} + 2x + 1$$

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f , et Δ la droite d'équation $y = x + 2$.

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.
Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
 - En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ .

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ , comme l'indique la figure ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.



Le contour du logo est représenté par le trapèze $DEFG$ où :

- D est le point de coordonnées $(-2 ; 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2 ; 0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe $\mathcal{C}$,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe $\mathcal{C}$.

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite Δ , la courbe $\mathcal{C}$, la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

- Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

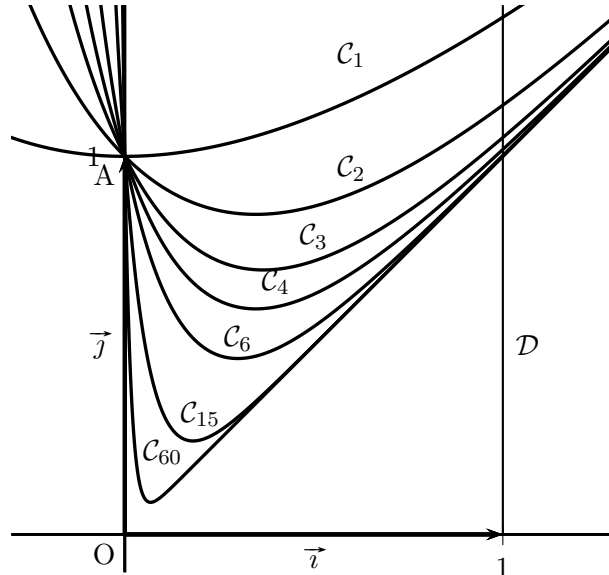
Exercice 4 (8 pts) : L'objet de l'exercice est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) \, dx.$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + e^{-nx}.$$

Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe $\mathcal{C}_n$ pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.



- a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .
 - b) En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.
2. Démontrer les variations de (I_n) .
3. a) Justifier que la suite (I_n) est convergente.
- b) Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n) .