

Devoir n°2 - Fonctions trigonométriques - Suites - TS

5 octobre 2018 - 1h

Exercice 1 (9 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x)$$

1. Etudier la parité de la fonction f .
2. Montrer que la fonction f est 2π -périodique.
3. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier les variations de f sur $[0; \pi]$.
4. Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur $[0; \pi]$, puis sur $[-\pi; \pi]$.
5. Justifier qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0; \pi]$ tel que $f(\alpha) = 0$,
et déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

Exercice 2 (11 points) : Soit f la fonction définie sur $] -1 ; +\infty[$ par : $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$.

On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 3 - \frac{4}{u_n + 1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f sur $] -1 ; +\infty[$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.
 - a) Sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses, u_0, u_1, u_2 et u_3 .
 - b) Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question 1. b.
 - a) Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -1 ; +\infty[$.
 - c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} \leq u_n$.
 - d) Question bonus : déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente, et déterminer la limite de la suite (u_n) .

