

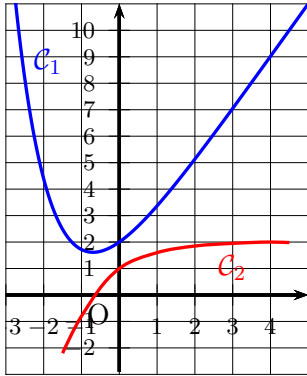
Devoir n°6 - Exponentielle - TS

18 décembre 2018 - 2h

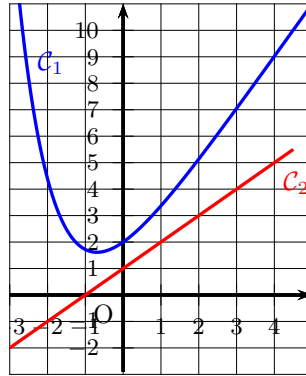
Exercice 1 (3 pts) : f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f . Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme C_1 la courbe représentative de la fonction f et C_2 la courbe représentative de la fonction f' .

Le point $A(0 ; 2)$ appartient à C_1 , et le point $B(0 ; 1)$ appartient à C_2 .

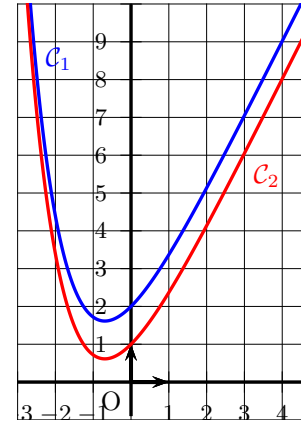
1. Dans les trois situations, on a dessiné la courbe représentative C_1 de la fonction f . Sur l'une d'entre elles, la courbe C_2 de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.



Situation 1



Situation 2 (C_2 est une droite)



Situation 3

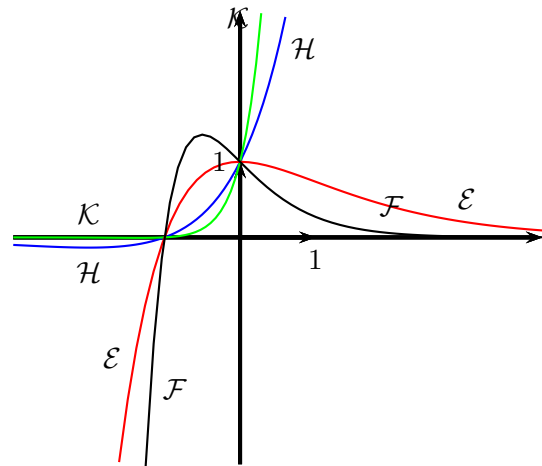
2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe C_1 en A.
 3. On sait que pour tout réel x , $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
 Déterminer les valeurs de a et b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.

Exercice 2 (5 pts) :

Pour tout entier relatif k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x + 1)e^{kx}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.



1. a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
 b) Déterminer les points d'intersection des courbes C_0 et C_1 .
 Vérifier que, pour tout entier k , ces points appartiennent à la courbe C_k .
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x , le signe de l'expression : $(x + 1)(e^x - 1)$.
 En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes C_k et C_{k+1} .
3. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
 En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k .
 (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$)
4. Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, et $\mathcal{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k , parmi les entiers -1 , -3 , 1 et 2 .
 Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

Exercice 3 (4 pts) : Partie A : On définit la suite (u_n) pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= f(u_n), \quad \text{avec } f(x) = xe^{-x} \end{cases}$$

f est définie et dérivable sur $[0 ; 1]$, et on admet que f est strictement croissante sur $[0; 1]$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
2. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
- b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.
Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.

Partie B :

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Compléter l'algorithme afin qu'il calcule S_{100} .

Déclaration des variables :

S et u sont des nombres réels

k est un nombre entier

Initialisation :

u prend la valeur

S prend la valeur

Traitement :

Pour k variant de 1 à

u prend la valeur $u \times e^{-u}$

S prend la valeur

Fin Pour

Afficher

Exercice 4 (8 pts) : Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g , et dresser son tableau de variations
3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α .
À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
- b) Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

Partie B : Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ telle que $A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0 ; +\infty[$.

Partie C : (Bonus) Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$.

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de coordonnées $(x ; f(x))$, $P(x ; 0)$ et $Q(0 ; f(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α .
2. Le point M a pour abscisse α ; la tangente (T) en M à la courbe $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

