

Devoir n°8 - Complexes - TS

5 février 2019 - 1h

Exercice 1 (10 pts) : Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Affirmation 1 : $\frac{\pi}{3}$ est un argument du nombre complexe $(-\sqrt{3} + i)^8$.

Affirmation 2 : Soient les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = i\sqrt{2}$. Les points A , B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 3 : Soit (E) l'équation $(z - 1)(z^2 - 8z + 25) = 0$

où z appartient à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Les points du plan dont les affixes sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle rectangle et isocèle.

Exercice 2 (10 pts) : On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Déterminer la forme exponentielle de a .
- Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

- Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
- Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

- On pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Ecrire $f(z)$ en fonction de x et y .
- Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.
- Représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ ainsi que le point A .