Devoir n°10 - Intégration - TS

20 mars 2020 - 1h30

Exercice 1 (3 pts) : Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)^{2020}} \quad \text{sur }]\frac{1}{2};+\infty[\qquad\qquad g(x) = \frac{x-2}{(-x^2+4x-3)^2} \quad \text{sur }]1;3[$$

Exercice 2 (3,5 pts) : Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

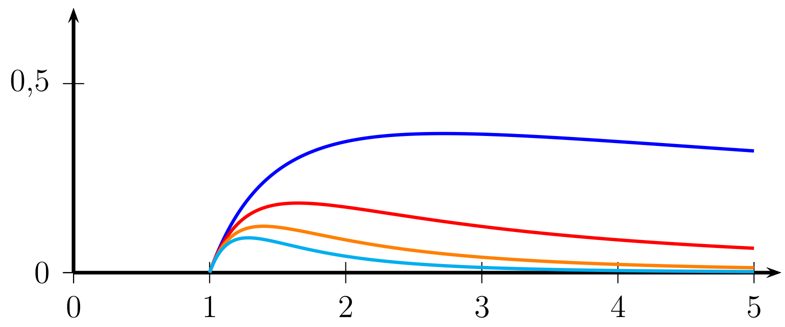
$$I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \qquad\qquad J = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$$

Exercice 3 (13,5 pts) : On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur $[1\,;\,5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal. Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$



1. A l'aide de la calculatrice, nommer $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.
2. En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de la suite (I_n), ainsi que l'existence et la valeur éventuelle de sa limite, lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Calculer la valeur exacte de I_1.
4. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$f'_n(x) = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

5. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1\,;\,5]$. On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$
6. a) Montrer que pour tout réel x sur $[1\ ;\ 5]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$$

   b) En déduire le sens de variation de la suite (I_n) pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
7. a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1\,;\,5]$:

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \frac{\ln(5)}{x^n}$$

   b) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

   c) En déduire que : $\quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\ln(5)}{n-1}(1 - \dfrac{1}{5^{n-1}})$ pour tout entier naturel $n > 1$.
8. Justifier que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.