

Devoir n°2 - Fonctions trigonométriques - Suites - TS

7 octobre 2019 - 1h15

Exercice 1 (7,5 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3(x) - \sin^3(x)$.

1. Etudier la parité de la fonction f (paire, impaire, ni l'un ni l'autre ?)
2. Montrer que la fonction f est 2π -périodique.
3. a) Montrer que pour tout réel x , on a : $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos x + \sin x$.
b) Montrer que $f'(x) = -3\sqrt{2} \sin(x) \cos(x) \cos(x - \frac{\pi}{4})$.
c) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-\pi; \pi]$.

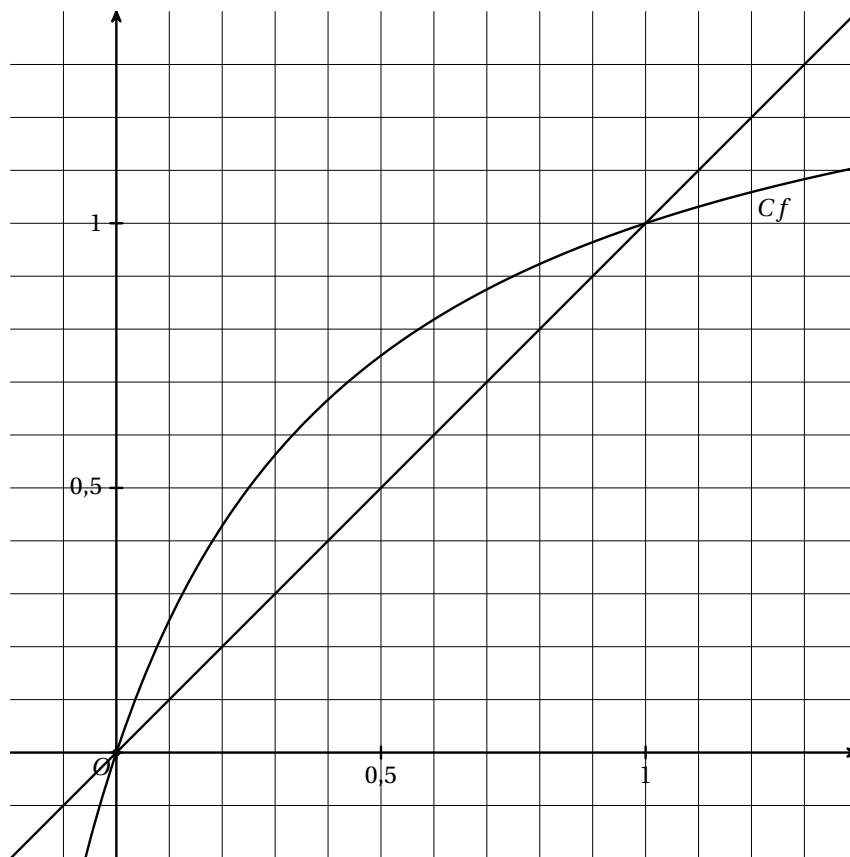
Exercice 2 (12,5 pts) :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie $] \frac{-1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1 + 2x}$.

Sur le graphique sont représentées la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$.



1. a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 , puis construire u_1 , u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) .
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.
3. a) Etudier les variations de la fonction f .
b) Démontrer par récurrence la variation observée de la suite (u_n) .
4. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.
a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
b) Exprimer pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$.
d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .