Devoir n°5 - Continuité - Dérivabilité - Fonction Exponentielle - TS

16 décembre 2019 - 2h

Exercice 1 (3,5 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{2}x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (8 pts) :

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Étude de la fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Exercice 3 (2,5 pts) : Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx+1}$$

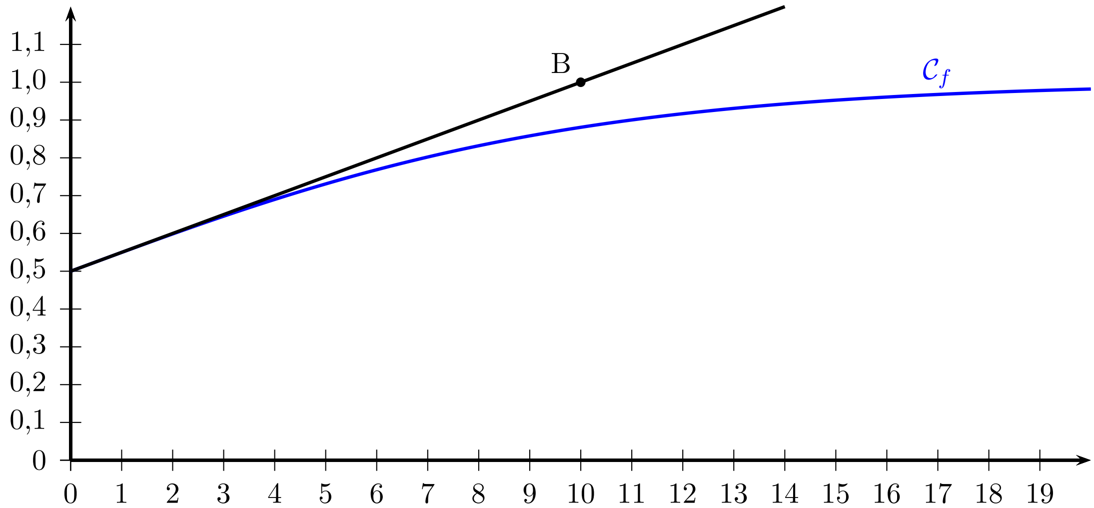
Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la fonction f_n admet un maximum.
Déterminer ce maximum.

Exercice 4 (6 pts) :

Partie A : Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.
La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. Justifier que $a = 1$. On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{\left(1+\mathrm{e}^{-bx}\right)^2}$$

3. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B : La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.
Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? On en donnera une valeur arrondie au centième.
2. a) Déterminer le sens de variation de la fonction p sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Calculer la limite de la fonction p en $+\infty$.
   c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé.
   Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produit.