

Devoir n°6 - Fonction Ln - TS

27 janvier 2020 - 1h

Exercice 1 (8,5 pts) : Soit f la fonction définie sur $] - 1; +\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(1 + x)$$

1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$;
en $+\infty$, on pourra vérifier que $f(x) = x(1 - \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x})$
2. Etudier les variations de f .
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $] - 1; +\infty[$.
4. a) En utilisant le signe de $f(x)$, justifier que pour tout entier naturel n non nul, on a : $\ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$
b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, on a : $(1 + \frac{1}{n})^n < e$

Exercice 2 (11,5 pts) :

Partie A : Étude du signe d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 4 \ln x$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0 .
2. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f .
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0; +\infty[$;
déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de α .
4. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B : Étude de la fonction

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormal, de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 2 \ln x$$

L'objectif est de démontrer que, parmi les points de la courbe $\mathcal{C}$, il y en a un et un seul plus proche de l'origine O que les autres.

1. Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x : exprimer OM en fonction de x .
(on rappelle que $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$)
2. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$.
 - a) Montrer que $h'(x) = \frac{2f(x)}{x}$; en déduire les variations de la fonction h .
 - b) En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe $\mathcal{C}$, tel que pour tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A , on ait $OM > OA$. Donner les coordonnées du point A .

Bonus :

3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}$ au point A .