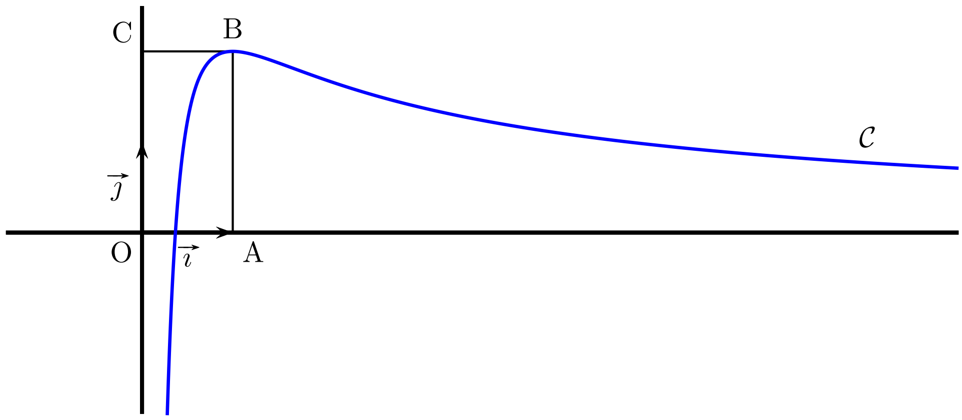
Devoir n°6bis - Fonction Ln - TS

11 février 2020 - 1h

Exercice 1 (3 pts) : Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
g est la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ln(2x+1)$

1. **Proposition 1 :** Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.
2. **Proposition 2 :** Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

Exercice 2 (8 pts) : Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

— les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ 2)$ et $(0\ ;\ 2)$;
— la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
— il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
   b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln x}{x^2}$.
   c) En déduire les réels a et b.
2. a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
   b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ et interpréter graphiquement.
   c) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 3 (9 pts) :
Partie A : On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. a) On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$;
   calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Montrer que, pour tout x strictement positif on a

$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

   En déduire la limite de f en $+\infty$.
   c) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14\,;\,15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
   c) En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

BONUS : Partie B : Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \\ u_{n+1} & = & 5\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \geqslant 0 \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 5\ln(x+3)$.
On a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. a) Construire sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.
   b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).
2. a) Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.
   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
   d) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.
   e) En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.
3. On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u - 14,2 < 0$
$\quad$ u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher u

   a) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.* Justifier que cet algorithme se termine.
   b) Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).