Devoir n°3 - Suites - TS

8 novembre 2019 - 2h

Exercice 1 (5 pts) : Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{n^2 + 4} \quad (n \in \mathbb{N})$
2. $u_n = \dfrac{2 - \sin n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
3. $u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{5^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
4. $u_n = 1 - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + ... + (\dfrac{-1}{4})^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 2 (7 pts) : Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :
- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,520$.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
4. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\,520$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520$.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

   La notation « ← » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».
6. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

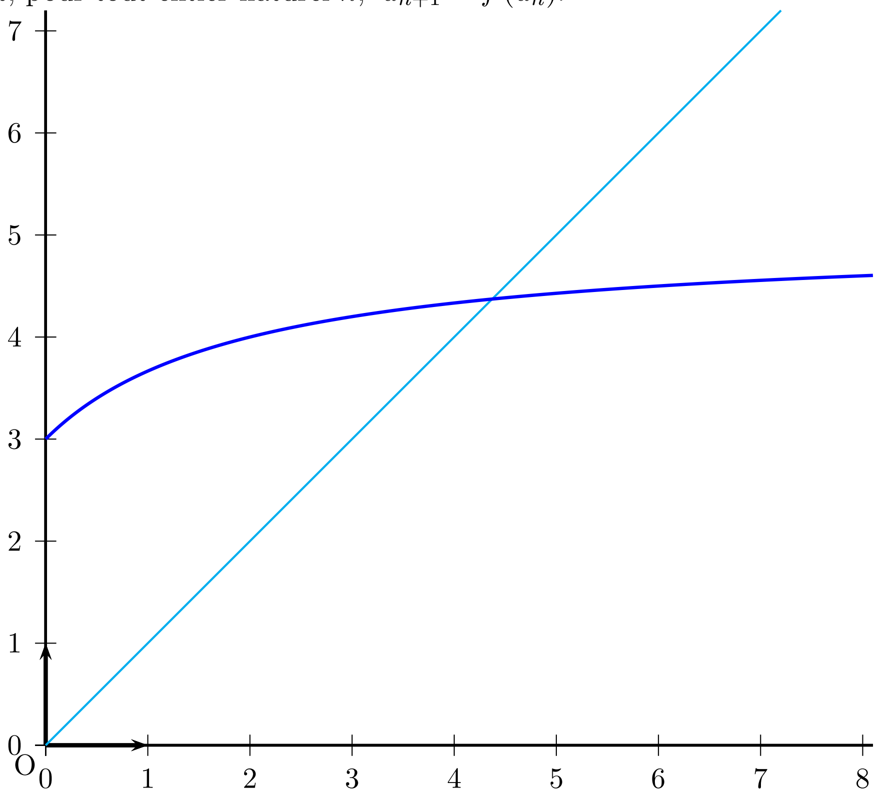
Exercice 3 (8 pts) : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On a tracé dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. On note α la solution.
   On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Sur la figure, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?



4. a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

   où α est le réel défini dans la question 2.

   b) Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

   a) Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

   b) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

Entrée :	n un entier naturel
Variables :	u et s sont des variables réelles
	n et i sont des variables entières
Initialisation :	u prend la valeur 1
	s prend la valeur u
	i prend la valeur 0
	Demander la valeur de n
Traitement :	Tant que ...
	Affecter à i la valeur $i+1$
	Affecter à u la valeur ...
	Affecter à s la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher s.

   c) Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.