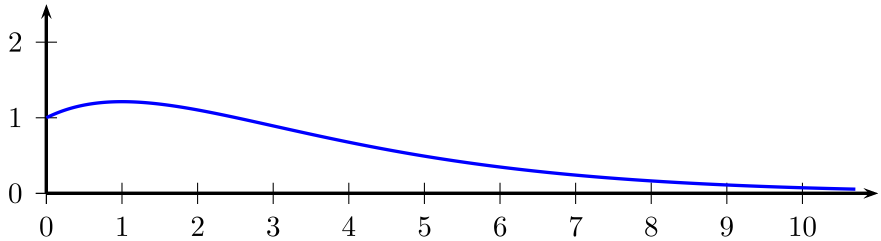
Test3 - Fonctions - TS

21 mai 2020 - 1h10

Partie A : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x},$$

où a et b désignent deux nombres réels. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est tracée ci-dessous.



Elle coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 1 et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(1)$.
2. Démontrer que, pour tout réel positif x, $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}b + a\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B : Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

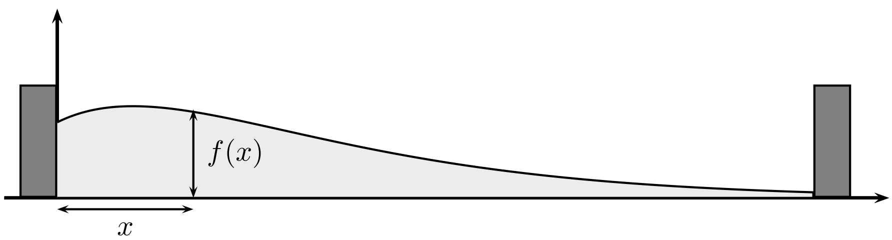
$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}.$$

1. a) Justifier que, pour tout réel x positif, $f(x) = 2\left(\dfrac{\frac{1}{2}x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

   b) Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$,
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et construire son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,07$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Donner l'arrondi de α à l'unité.

Partie C - Modélisation d'un tas de sable

Dans cette partie, on considère que la courbe de la fonction f modélise le profil d'un tas de sable. La longueur x et la hauteur $f(x)$ sont exprimées en mètres.
Ainsi, le fait que $f(0) = 1$ signifie qu'à son extrémité gauche, la hauteur du tas de sable est de 1 mètre.
On souhaite que le tas de sable soit limité par deux murs comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Le mur de gauche coincide avec l'axe des ordonnées et le mur de droite est placé de telle sorte que la hauteur de sable à cet endroit est de 7 cm.



1. Pourquoi le mur de droite doit-il être placé à environ 10 mètres du mur de gauche ?
2. Vérifier que la fonction G définie sur $[0\,;\,10]$ par $G(x) = (-2x-4)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$ est une primitive de la fonction g définie sur $[0\,;\,10]$ par $g(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.
3. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
4. Pour pouvoir créer un terrain de sport sur sable, on décide de niveler le tas de sable, c'est-à-dire de l'étaler à une même hauteur entre les deux murs.
   Quelle sera la hauteur du tas de sable une fois le nivellement réalisé ?
   Expliquer le raisonnement et arrondir le résultat au centimètre.