Correction du devoir n°11 - TSpé

Ex 1 : $A = \int_1^2 \underbrace{(3x^2-12x+1)}_{u'}\underbrace{\ln x}_{v}\,dx$

$= \left[\underbrace{(x^3-6x^2+x)}_{u}\underbrace{\ln x}_{v}\right]_1^2 - \int_1^2 \underbrace{(x^3-6x^2+x)}_{u} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,dx$

/3

$= -14\ln(2) - 0 - \int_1^2 (x^2-6x+1)\,dx$

$= -14\ln 2 - \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + x\right]_1^2$

$= -14\ln 2 - \left(\frac{8}{3} - 10 - \frac{1}{3} + 2\right)$

$= -14\ln 2 - \frac{7}{3} + 8 = \frac{17}{3} - 14\ln 2$

Ex 2 : $B = \int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{2x}}_{u'}\,\underbrace{\cos(3x)}_{v}\,dx$

$= \left[\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u}\underbrace{\cos(3x)}_{v}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{u} \times \underbrace{(-3)\sin(3x)}_{v'}\,dx$

$= \frac{1}{2}e^{\pi}\underbrace{\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \underbrace{e^{2x}}_{u'}\,\underbrace{\sin(3x)}_{v}\,dx$

par linéarité

/4

$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\left[\frac{1}{2}e^{2x}\sin(3x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}e^{2x} \times (3\cos(3x))\,dx\right)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{\pi}\underbrace{\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1} - \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos(3x)\,dx\right)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^{\pi} - \frac{9}{4}B$

alors $\frac{13}{4}B = \frac{-1}{2} - \frac{3}{4}e^{\pi}$ et $\boxed{B = \frac{-2}{13} - \frac{3}{13}e^{\pi}}$

Ex 3 : $\boxed{f(x) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x+2}}$ sur $]-2;+\infty[$

1) $ax+b+\dfrac{c}{x+2} = \dfrac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} = \dfrac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$

14

$= f(x)$

$\Leftrightarrow ax^2+(2a+b)x+(2b+c) = f(x) \quad \forall x \in]-2;+\infty[$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ 2a+b=3 \\ 2b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases}$ $\quad f(x) = 2x-1+\dfrac{3}{x+2}$

2) $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(2x-1+\dfrac{3}{x+2}\right)dx$ 2,5

$= \left[x^2-x+3\ln(x+2)\right]_{-1}^{1} = 3\ln 3-(2+3\ln 1)$

1,5 $\quad x+2>0$ sur $[-1;1]$ $\quad = 3\ln 3-2$

Ex 4 : Bonus : $\boxed{f(x) = (x-1)e^{1-x}}$ sur $[1;+\infty[$

1) f continue comme composée et produit sur $[1;+\infty[$

donc $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ est définie dérivable sur $[1;+\infty[$ avec $F'(x) = f(x) = (x-1)e^{1-x}$

$e^{1-x}>0$ et $x-1\geq 0$ sur $[1;+\infty[$

donc $F'(x)\geq 0$ et F croissante

2) $F(x) = \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \left[(t-1)(-e^{1-t})\right]_1^x - \int_1^x -e^{1-t}\,dt$

$= (x-1)(-e^{1-x}) - \left[e^{1-t}\right]_1^x$

$= -xe^{1-x} + \cancel{e^{1-x}} - \cancel{e^{1-x}} + e^0$

$= 1-xe^{1-x}$