Correction du dev n° 12 - Tspé

$\boxed{f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sur $[1;5]$ $\boxed{I_n = \int_1^5 f_n(x)\,dx}$

1) sur $[1;5]$, f_n continue positive ($\ln x \geq 0$ et $x^n > 0$)
$1 < 5$, donc I_n est l'aire en u.a. du domaine délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$,
1,5 l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_n$

on voit que $f_4(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x) \leq f_1(x)$
donc (I_n) semble décroissante et il semble que
0,5 $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

2) $I_1 = \int_1^5 \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^5 \frac{1}{x} \times \ln x\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^5$
$u'u \to \frac{u^2}{2}$
1,5 donc $I_1 = \frac{(\ln 5)^2}{2}$

3) a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{n+1}} - \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln x - x\ln x}{x^{n+1}} = \frac{(1-x)\ln x}{x^{n+1}}$

$\left.\begin{array}{l}\ln x \geq 0\\ x^{n+1} > 0\\ 1-x \leq 0\end{array}\right\}$ sur $[1;5]$ donc $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$
1,5

b) f_n continue pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 < 5$
Par passage à l'intégrale, on a $\int_1^5 f_{n+1}(x)\,dx \leq \int_1^5 f_n(x)\,dx$
1 donc $I_{n+1} \leq I_n$. $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante

4) a) $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow \ln 1 \leq \ln x \leq \ln 5$ car $x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0;+\infty[$
$\Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln 5$
2 $\Rightarrow \boxed{0 \leq \frac{\ln x}{x^n} \leq \frac{\ln 5}{x^n}}$ car $\frac{1}{x^n} > 0$ sur $[1;5]$

b) $\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^5 x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^5 = \frac{5^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1}$

$n > 1$
1,5 $= \frac{1}{(1-n)\,5^{n-1}} - \frac{1}{(1-n)} = \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{5^{n-1}} - 1\right) = \boxed{\frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$

ⓒ $0 \leq f_n(x) \leq \frac{\ln 5}{x^n}$ $\quad f_n$ et $x \mapsto \frac{\ln 5}{x^n}$ continues sur $[1;5]$

$n > 1$ et $1 < 5$

Par passage à l'intégrale

$0 \leq I_n \leq \int_1^5 \frac{\ln 5}{x^n}dx \iff 0 \leq I_n \leq \ln 5 \int_1^5 \frac{1}{x^n}dx$ par linéarité

donc $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)}$ 1,5

5) (I_n) décroissante et minorée par 0

Par théorème (I_n) converge 0,75

$5>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$

Par quotient et somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 1$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln 5}{n-1} = 0$

Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln 5}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right) = 0$ 1,25

D'après le théorème des gendarmes $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

---

6) Bonus $\quad f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$ sur $[1;5]$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

ⓐ $f'_n(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\times x^n - \ln x \times nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \dfrac{x^{n-1} - n\,x^{n-1}\ln x}{x^{n-1}\times x^{n+1}}$

$= \dfrac{\cancel{x^{n-1}}(1 - n\ln x)}{\cancel{x^{n-1}}\times x^{n+1}} = \dfrac{1 - n\ln x}{x^{n+1}}$

ⓑ f_n admet un maximum en x_{A_n} / $f'_n(x_{A_n}) = 0$

or $f'_n(x_{A_n}) = 0 \iff 1 - n\ln x_A = 0 \iff \ln x_A = \frac{1}{n} \iff x_{A_n} = e^{1/n}$

et $f_n(x_{A_n}) = \dfrac{\ln(x_{A_n})}{(x_{A_n})^n} = \dfrac{\ln(x_{A_n})}{(e^{1/n})^n} = \dfrac{1}{e}\ln(x_{A_n}) = y_{A_n}$

Donc $A_n \in \Gamma$ d'équation $y = \frac{1}{e}\ln x$.