Devoir n°12 - le dernier ! - Calcul intégral - TSpé maths

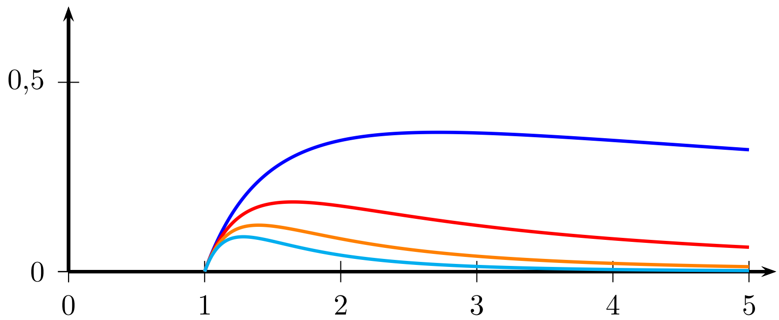
6 mai 2021 - 40 min

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur $[1 ; 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

Pour tout entier $n > 0$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes $\mathcal{C}_n$ pour n appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par

$$I_n = \int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$



1. (2 pts) En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de la suite (I_n), ainsi que l'existence et la valeur éventuelle de sa limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. (1,5 pt) Calculer la valeur exacte de I_1.

3. a) (1,5 pt) Montrer que pour tout réel x sur $[1 ; 5]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$

   b) (1 pt) En déduire le sens de variation de la suite (I_n) pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

4. a) (1 pt) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$: $0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln(5)}{x^n}$

   b) (1,5 pt) Montrer que pour tout entier $n > 1$: $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$

   c) (1,5 pt) En déduire que : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\ln(5)}{n-1}(1 - \dfrac{1}{5^{n-1}})$ pour tout entier naturel $n > 1$.

5. (0,75 + 1,25 pt) Justifier que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

6. En Bonus :

   a) Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$: $f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

   b) Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1 ; 5]$.
   On note A_n le point de la courbe $\mathcal{C}_n$ ayant pour ordonnée ce maximum.
   Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}\ln(x)$