# Devoir n°1 - Suites - TSpé maths

28 septembre 2020 - 1h15

**Exercice 1 (4,5 pts) :** Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

1. $u_n = \dfrac{-2n^3 - 5n + 1}{3n^2 - 1}$ $(n \in \mathbb{N})$
2. $u_n = -3n - \sin n \quad (n \in \mathbb{N})$
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

**Exercice 2 (8,5 pts) :** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1. Calculer $u_1$ et $u_2$ ; en déduire une conjecture sur le sens de variation de la suite $(u_n)$.
2. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$ : $u_n \leq n + 3$
   b) Montrer que pour tout entier naturel $n$,

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

   En déduire le sens variation de la suite $(u_n)$.
3. On désigne par $(v_n)$, la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - n$.
   a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   b) En déduire une expression de $v_n$ en fonction de $n$, puis justifier que, pour tout entier naturel $n$, on a :

   $$u_n = 2(\frac{2}{3})^n + n$$

   c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 3 (7 pts) :** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0,7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1 + 2u_n} = f(u_n)$$

où $f$ est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1 + 2x}$.

1. Etudier les variations de $f$ est sur $[0 ; +\infty[$.
2. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$
3. En déduire les variations de la suite $(u_n)$, et justifier que la suite $(u_n)$ converge.
4. On note $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. On admet que $\ell$ vérifie $\ell = f(\ell)$. Déterminer la limite $\ell$.

**Exercice 4 (Bonus) :** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + 3^n - 7$$

On considère la suite auxiliaire $(v_n)$ telle que, pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
On pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer cette somme de deux manières différentes. (en fonction de $u_n$, puis en fonction de $n$)
2. En déduire l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.