Correction du devoir n°2 - TSpé

Ex 1 : $f_1(x) = \dfrac{-3x+4}{x^3+x-3}$ en $+\infty$ fonction rationnelle

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x^2} = \boxed{0}$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$ 1/

$f_2(x) = \dfrac{x-5}{x^2-x-2}$ $\lim\limits_{x\to 2}(x-5) = -3$ 0,25

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

0,75

$a=1$

du signe de a à l'extérieur

$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-x-2) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-x-2) = 0^- \end{cases}$ 0,5

2,5/

Par quotient $\lim\limits_{x\to 2^+} f_2(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f_2(x) = +\infty$

0,5

La droite d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_2$ 0,5 /2,5

$f_3(x) = (3-x^2)^3$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x^2) = -\infty$ 1/

on pose $X = 3-x^2$ $\lim\limits_{X\to-\infty} X^3 = -\infty$

Par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$

/8,5

$$f_4(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}$$
$$= \left(\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}\right) \times \frac{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}}$$
$$= \frac{(2x+3)-(2x+1)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}} = \frac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}}$$

Par composition et somme $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x+1}\right) = +\infty$

1,5

Par quotient $\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = 0$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à C_4 en $+\infty$

$f_5(x) = 2x^2 - \sin x$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1$ 0,5

$\Rightarrow 2x^2 - 1 \leq 2x^2 - \sin x \leq 2x^2 + 1$

$2x^2 - 1 \leq f_5(x)$

et $\lim_{x\to-\infty}(2x^2-1) = +\infty$ 0,5

1,25

Par comparaison $\lim_{x\to-\infty} f_5(x) = +\infty$

0,25

$f_6(x) = \dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+2x-3}$ 1 est racine du numérateur et du dénominateur.

$3x^2-2x-1 = (x-1)(3x+1)$

$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$

1,25

Donc $f_6(x) = \dfrac{3x+1}{x+3}$ pour $x \neq 1$ 0,75

Par quotient $\lim_{x\to 1} f_6(x) = 1$ 0,5

Ex2 : 1) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{-2}{3}u_n + 1 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

Faux

$\boxed{v_n = u_n - 2/3}$

$u_1 = \frac{-8}{3} + 1 = \frac{-5}{3}$

$u_2 = \frac{10}{3} + 1 = \frac{13}{3}$

$v_0 = u_0 - 2/3 = 4 - 2/3 = \frac{10}{3}$

$v_1 = u_1 - 2/3 = \frac{-5}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}$

$v_2 = u_2 - 2/3 = \frac{13}{3} - \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

$\frac{v_1}{v_0} = \frac{-7/3}{10/3} = \frac{-7}{10}$ $\quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{11/3}{-7/3} = \frac{-11}{7}$

$\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$ donc (v_n) n' est pas une suite géométrique

1

2) $w_n = \frac{3 + \cos n}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$\Leftrightarrow 2 \leq 3 + \cos n \leq 4$

$\Leftrightarrow \frac{2}{n^2} \leq w_n \leq \frac{4}{n^2}$ $(n^2 > 0)$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{n^2} = 0$

D'après le théorème des gendarmes (w_n) converge vers 0

VRAI

1

3) soit $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - 8 \quad (n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 5 \end{cases}$

0,5

D'après la calculatrice

$\begin{cases} u_7 = 2191 \\ u_8 = 6565 \end{cases}$

A la fin de l'algorithme $U = 6565$

Faux

13

Ex 3 : $\boxed{u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

1,9

$v_1 = u_1$

$v_2 = u_1 \times u_2$

$v_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$ $(n \geqslant 3)$

1) $u_1 = \dfrac{1 \times 3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$ $u_2 = \dfrac{2 \times 4}{3^2} = \dfrac{8}{9}$ $u_3 = \dfrac{3 \times 5}{4^2} = \dfrac{15}{16}$

$v_1 = \dfrac{3}{4}$; $v_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{9} = \dfrac{3 \times 4 \times 2}{4 \times 3 \times 3} = \dfrac{2}{3}$ 0,5

1 et $v_3 = v_2 \times u_3 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{15}{16} = \dfrac{2 \times 5 \times 3}{3 \times 2 \times 8} = \dfrac{5}{8}$ 0,5

2) $V \leftarrow 1$

pour i variant de 1 à n

$U \leftarrow \dfrac{i\,(i+2)}{(i+1)^2}$

$V \leftarrow V \times U$

fin pour

0,75

3) a) $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2} = \dfrac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2} = \dfrac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$

donc $\boxed{1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}} = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2} = u_n$ 0,75

b) $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

$\left.\begin{array}{l} n > 0 \\ n+2 > 0 \\ (n+1)^2 > 0 \end{array}\right\}$ donc $u_n > 0$ 0,5

1

$u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ avec $\dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$

donc $u_n < 1$ pour $n \in \mathbb{N}$

0,5 On a donc $0 < u_n < 1$

4) a) $v_n = v_{n-1} \times u_n \quad (n \geqslant 3)$

$$v_{n+1} - v_n = v_n \times u_{n+1} - v_n$$
$$= v_n \times (u_{n+1} - 1)$$

1

$u_n > 0$

donc $v_n > 0$ ~~par~~ produit

$u_n < 1$ donc $u_{n+1} < 1$ et $u_{n+1} - 1 < 0$

Par produit $v_{n+1} - v_n < 0$ (v_n) décroissante

b) (v_n) décroissante et minorée par 0

par théorème (v_n) converge 0,5

5) a) $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+1+2)}{(n+1+1)^2}$ 0,5

$$= v_n \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

b) on veut montrer que $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$ 0,25

pour $n \in \mathbb{N}^*$

. initialisation : pour $n = 1$

$v_1 = \dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1+2}{2\times(1+1)} = \dfrac{3}{2\times 2} = \dfrac{3}{4}$ vrai pour $n = 1$

0,5

. hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, je suppose que

$v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$; on veut montrer que

$$v_{n+1} = \frac{n+3}{2(n+2)}$$

2,5

$$v_{n+1} = v_n \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{(n+2)}{2\cancel{(n+1)}} \times \frac{\cancel{(n+1)}(n+3)}{(n+2)^2}$$

15

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{n+3}{2(n+2)}$$ vrai au rang $(n+1)$

- **Conclusion** : on a montré par récurrence que $v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ 0,25

c) $v_n = \frac{n(1+2/n)}{2n(1+1/n)} = \left(\frac{1+2/n}{1+1/n}\right) \times \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\lim_{n\to+\infty} (1+2/n) = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} (1+1/n) = 1$

Par quotient et Produit $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1/2$

0,5

6) **Bonus** : $w_1 = \ln(u_1) = \ln(v_1)$

$w_2 = \ln(u_1) + \ln(u_2) = \ln(u_1 \times u_2) = \ln(v_2)$

$w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \ln(u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n)$

$(n \geqslant 3)$ $= \ln(v_n)$

$w_7 = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \cdots + \ln(u_7)$

$= \ln(u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_7)$

$= \ln(v_7)$ or $v_7 = \frac{7+2}{2(7+1)} = \frac{9}{16}$

donc $w_7 = \ln\left(\frac{9}{16}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) = 2\ln(v_1)$

$\Leftrightarrow w_7 = 2w_1$