Devoir n°2 - Suites et Limites de fonctions - TSpé maths

21 octobre 2020 - 2h

Exercice 1 (8,5 pts) : Déterminer la limite de chaque fonction à l'endroit indiqué, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$f_1(x) = \dfrac{-3x+4}{x^3+x-3}$; en $+\infty$

$f_2(x) = \dfrac{x-5}{x^2-x-2}$; en 2

$f_3(x) = (3-x^2)^3$; en $-\infty$

$f_4(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}$; en $+\infty$

$f_5(x) = 2x^2 - \sin x$; en $-\infty$

$f_6(x) = \dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+2x-3}$; en 1

Exercice 2 (2,5 pts) : Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. *Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

1. Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 4 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1$$

et soit (v_n) la suite définie par

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ v_n = u_n - \frac{2}{3}.$$

Affirmation 1 : La suite (v_n) est une suite géométrique.

2. Soit (w_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n non nul,

$$w_n = \frac{3+\cos(n)}{n^2}.$$

Affirmation 2 : La suite (w_n) converge vers 0.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
U ← 5
N ← 0
Tant que U ⩽ 5 000
    U ← 3 × U − 8
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

Affirmation 3 : À la fin de l'exécution, la variable U contient la valeur 5 000.

Exercice 3 (9 pts) : On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul n, par :

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

La suite (v_n) est définie par :
$v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 \times u_2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$.

1. Vérifier que l'on a $v_2 = \dfrac{2}{3}$ puis calculer v_3.

2. On considère l'algorithme incomplet ci-contre. Recopier et compléter sur la copie cet algorithme afin que, après son exécution, la variable V contiennent la valeur v_n où n est un nombre entier naturel non nul définie par l'utilisateur.
   Aucune justification n'est attendue.

	Algorithme
1.	$V \leftarrow 1$
2.	Pour i variant de 1 à n
3.	$\quad U \leftarrow \dfrac{\ldots(\ldots+2)}{(\ldots+1)^2}$
4.	$\quad V \leftarrow \ldots$
5.	Fin Pour

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $0 < u_n < 1$.

4. a) Montrer que la suite (v_n) est décroissante
   b) Justifier que la suite (v_n) est convergente (on ne demande pas de calculer sa limite).

5. a) Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.
   b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n).

6. (Bonus) On considère la suite w_n définie par
   $w_1 = \ln(u_1)$, $w_2 = \ln(u_1) + \ln(u_2)$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, par

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k) = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ldots + \ln(u_n).$$

Montrer que $w_7 = 2w_1$

Propriétés : $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$ et $\ln(a^2) = 2\ln a$ pour $a > 0$ et $b > 0$