Devoir n°3 - Continuité et Dérivabilité - TSpé maths

19 novembre 2020 - 1h

Exercice 1 (5 pts) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}*$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+3} & \text{si } x > 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{pour } x < 0 \text{ et } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}*$?

Exercice 2 (15 pts) : Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note α.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de f en $\dfrac{1}{2}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$; en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.

Que du Bonus

Partie C : On souhaite déterminer un encadrement de α par balayage.
Parmi les 3 algorithmes suivants, un seul fonctionne ; préciser lequel et pourquoi.

Programme 1

```
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h

print(a,"< alpha <",a+h)
```

Programme 2

```
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)<0:
    a=a+h

print(a,"< alpha < ",a+h)
```

Programme 3

```
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h
    print(a,"< alpha <",a+
        h)
```

Partie D : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x$. (on pourra s'aider de la calculatrice)

1. Conjecturer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
2. Pour tout réel $x > \dfrac{1}{2}$, on considère les points M et N d'abscisses x respectivement sur $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
   Que peut-on conjecturer sur la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?
3. Démontrer les conjectures précédentes.