Correction du dev n°4 - T Spé maths

Ex 1 : $f(x) = (2x+1)e^{-2x} + 3$ sur $[-2 ; 4]$

1) f dérivable comme composée et produit

$f'(x) = 2e^{-2x} + (2x+1)e^{-2x} \times (-2)$

$= e^{-2x}(2 - 4x - 2) = -4x\,e^{-2x}$ 1,5

2) $e^{-2x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-4x$ 0,5

x	-2		0		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$f(4)$

$f(-2) = -3e^{4} + 3$

$f(4) = 9e^{-8} + 3$ 1,5

3) $f''(x) = -4e^{-2x} + (-4x)e^{-2x} \times (-2)$

$= e^{-2x}(-4 + 8x) = (8x-4)e^{-2x}$ 1,5

4) $e^{-2x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(8x-4)$ 0,5

x	-2		$1/2$		4
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

$f''(x) \leq 0$ sur $[-2 ; 1/2]$ donc f concave

$f''(x) \geq 0$ sur $[1/2 ; 4]$ donc f convexe. 1

5) $f''(1/2) = 0$ et f'' change de signe

$f(1/2) = 2e^{-1} + 3$ 1,5

Donc $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion en $A\left(1/2 ; \frac{2}{e} + 3\right)$

/8,5

Ex 2 : $f(x) = \dfrac{2e^x}{e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$

~~13~~ 13,5

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ par somme et quotient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $(-\infty)$ ~~0,1~~ +0,5

2) $f(x) = \dfrac{e^x \times 2}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \dfrac{2}{1 + 1/e^x}$ 1,5

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ par quotient et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{e^x} = 1$

Par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ 0,5

Donc $\mathcal{D}$: $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $+\infty$

3) $f'(x) = \dfrac{2e^x(e^x+1) - 2e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ 1,5

$f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}$. 0,5

4) (T) : $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$ $A(0\,;1)$

$f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{2}{4} = 1/2$

$y = \dfrac{1}{2}x + 1$ 1

5) ⓐ $f(x) - \left(\dfrac{1}{2}x + 1\right) = \dfrac{2e^x}{e^x+1} - \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{4e^x - (e^x+1)(x+2)}{2(e^x+1)}$

$= \dfrac{4e^x - xe^x - 2e^x - x - 2}{2(e^x+1)} = \dfrac{2e^x - xe^x - x - 2}{2(e^x+1)}$

du signe de $g(x)$ $= \dfrac{g(x)}{2(e^x+1)}$ 1,5

ⓑ on a $g(x) = 2e^x - xe^x - x - 2$

$g'(x) = e^x - xe^x - 1$

$g''(x) = -xe^x$ sur $\mathbb{R}$

(i) $e^x > 0$ donc $g''(x)$ du signe de $(-x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	

1,5

donc g' croissante sur $]-\infty;0]$ puis décroissante sur $[0;+\infty[$

(ii) alors g' admet un maximum en $x=0$

$g'(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

donc $g'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}$

1,5

alors g décroissante sur $\mathbb{R}$

(iii) $g(0) = 2e^0 - 0 - 0 - 2 = 0$

donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

1

c) $g(x) \geq 0$ sur $]-\infty;0]$ donc $f(x) \geq \frac{1}{2}x+1$

$\mathcal{C}$ au-dessus de (T)

$g(x) \leq 0$ sur $[0;+\infty[$ donc $f(x) \leq \frac{1}{2}x+1$

$\mathcal{C}$ au-dessous de (T)

1,5

Alors $A(0;1)$ est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}$.