Devoir n^{o}4 - Fonction Exponentielle - TSpé maths

3 décembre 2020 - 1h

Exercice 1 (8 pts) : On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + 3$$

1. Déterminer f' la fonction dérivée de f sur $[-2\ ;\ 4]$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. On note f'' la fonction dérivée de f' sur $[-2\ ;\ 4]$. Montrer que

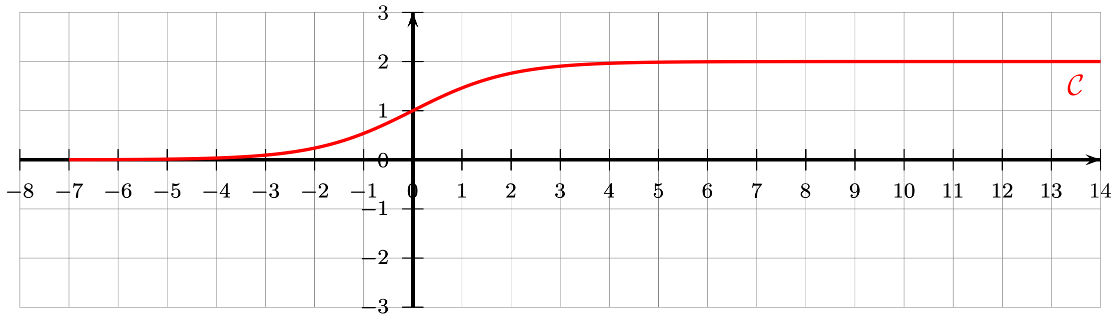
$$f''(x) = (8x-4)\mathrm{e}^{-2x}$$

4. Étudier le signe de f'' et en déduire la convexité de f.
5. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées.

Exercice 2 (12 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2. Montrer que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}$.

3. Calculer $f'(x)$, f' étant la fonction dérivée de f, et donner les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer l'équation de (T) la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(0\ ;\ 1)$.

5. On veut étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente (T).
   a) Montrer que $f(x) - (\frac{1}{2}x + 1) = \dfrac{g(x)}{2(\mathrm{e}^x + 1)}$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - x - 2$.
   b) On admet que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. avec $g'(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1$ et $g''(x) = -x\mathrm{e}^x$.
      i. Déterminer le signe de $g''(x)$ et en déduire les variations de la fonction g'.
      ii. Déterminer le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g.
      iii. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c) Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente (T).
      Que peut-on dire du point A ?