Devoir n^{o}5 - Fonction Ln - Primitives - Equations différentielles - TSpé maths

14 janvier 2021 - 2h

Exercice 1 (9,5 pts) : On considère l'équation notée (E) : $\ln x = -x$.
Le but de l'exercice est de prouver que l'équation (E) admet une solution unique notée α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, et d'utiliser une suite convergente pour en obtenir un encadrement.

Partie A : Existence et unicité de la solution

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + \ln x$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Vérifier que $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Partie B : Encadrement de la solution α

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{4x - \ln x}{5}$

1. Étude de quelques propriétés de la fonction g
   a) Etudier les limites de $g(x)$ en 0 et en $+\infty$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   c) Démontrer qu'un nombre réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $g(x) = x$.
2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = g(u_n)$.
   a) En utilisant le sens de variation de la fonction g, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

   b) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
3. **Bonus :** Recherche d'une valeur approchée de α
   a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_{10}, arrondie à 10^{-6}.

   b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α.
   En déduire un encadrement de α sous la forme $u \leqslant \alpha \leqslant v$,
   où u et v sont deux décimaux écrits avec trois décimales.

Exercice 2 (3,5 pts) : Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^3}$ sur $]0; +\infty[$
2. $g(x) = x(x^2 - 1)^3$ sur $\mathbb{R}$
3. $h(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$
4. $k(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$ sur $[-1; 1]$
5. $j(x) = \dfrac{1}{3x+1}$ sur $]\dfrac{-1}{3}; +\infty[$

Exercice 3 (9 pts) :

Une équipe de biologistes cherche à étudier l'évolution d'une population de petits rongeurs.

1. Elle étudie d'abord en laboratoire l'évolution d'une population qui compte initialement 50 individus.
   La taille de la population t années après le début de l'expérience est notée $f(t)$ et exprimée en centaines d'individus. On peut montrer que la fonction f est solution, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, de l'équation différentielle :
   $$(E_1) : y' = \frac{y}{4} \quad \text{avec} \quad f(0) = 0,5$$
   a) Déterminer l'expression de $f(t)$.

   b) Déterminer le sens de variation de f, puis la limite de $f(t)$ en $+\infty$, et interpréter les résultats obtenus.

   c) Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs ?
2. En réalité, dans le milieu naturel où évolue ce petit rongeur, un prédateur limite la croissance de la population.
   On note $g(t)$ le nombre de rongeurs, en centaines d'individus vivants t années après le début de l'étude.
   Pour modéliser l'évolution de cette population, les scientifiques ont utilisé un modèle dit de Verhulst et on admet que la fonction g est solution de l'équation différentielle, appelée **équation logistique** :
   $$(E_2) : y' = \frac{y}{4} - \frac{y^2}{12} \quad \text{avec} \quad g(0) = 20$$
   a) On supose que, pour tout réel positif t, on a $g(t) > 0$.
   On définit la fonction h sur $[0; +\infty[$ par $h = \dfrac{1}{g}$.
   Montrer que que g est solution de (E_2) si et seulement si h est solution de l'équation différentielle :
   $$(E_3) : y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$$
   b) Donner toutes les solutions de l'équation (E_3) et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de g.

   c) Déterminer le sens de variation de g, puis la limite de $g(t)$ en $+\infty$ et interpréter les résultats obtenus.