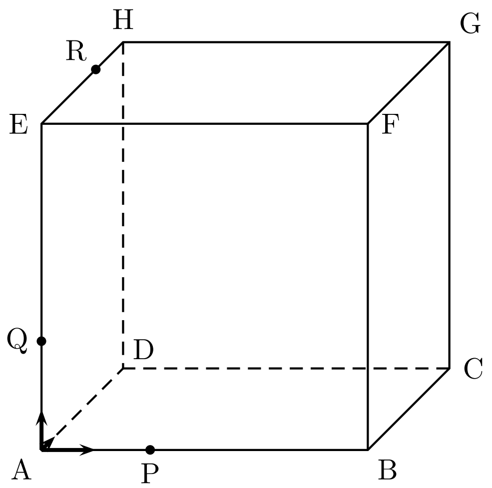
Devoir nº6 - Géométrie dans l'Espace - TSpé maths

4 février 2021 - 1h

Exercice 1 (10 pts) :



Dans l'espace, on considère un cube $ABCDEFGH$ de centre Ω et d'arête de longueur 6.
Les points P, Q et R sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}.$$

Dans tout ce qui suit on utilise le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ avec :

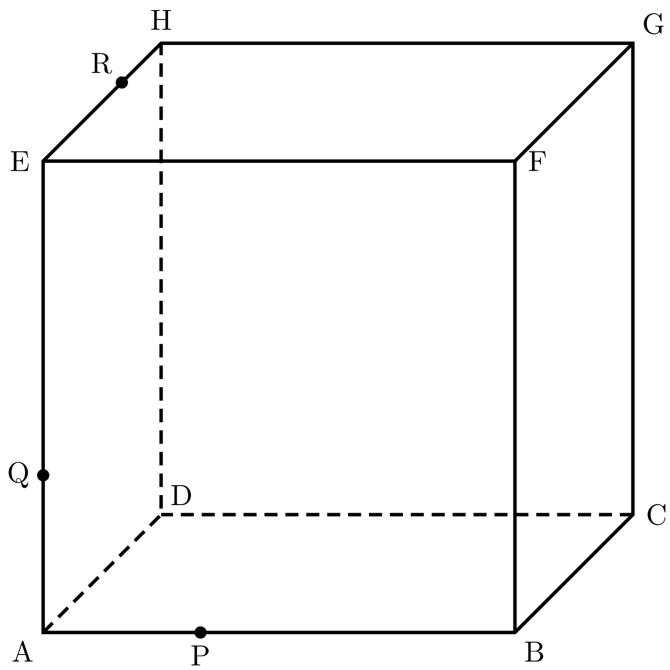
$$\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB},\ \vec{\jmath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AD} \text{ et } \vec{k} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}.$$

Dans ce repère, on a par exemple :

$$B(6\ ;\ 0\ ;\ 0),\ F(6\ ;\ 0\ ;\ 6) \text{ et } R(0\ ;\ 4\ ;\ 6).$$

1. a) Donner, sans justifier, les coordonnées des points P, Q et Ω.
   b) Montrer que les points P, Q et R définissent un plan.
   c) Déterminer les nombres réels b et c tels que $\vec{n}(1\ ;\ b\ ;\ c)$ soit un vecteur normal au plan (PQR) .
   d) En déduire qu'une équation du plan (PQR) est : $x - y + z - 2 = 0$.
2. a) On note Δ la droite perpendiculaire au plan (PQR) passant par le point Ω, centre du cube.
   Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b) En déduire que la droite Δ coupe le plan (PQR) au point I de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{10}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$.
   c) Calculer la distance ΩI.
3. On considère les points $J(6\ ;\ 4\ ;\ 0)$ et $K(6\ ;\ 6\ ;\ 2)$.
   a) Justifier que le point J appartient au plan (PQR).
   b) Vérifier que les droites (JK) et (QR) sont parallèles.

   Bonus : Sur la figure donnée ci-dessous, tracer la section du cube par le plan (PQR).



Exercice 2 (10 pts) : Justifier si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse.

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, on note d la droite dont une représentation paramétrique est :

$$d : \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

On note d' la droite passant par le point $B(4;4;-6)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(5;2;-9)$.

Affirmation 1 : « Les droites d et d' sont coplanaires. »

2. Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(0;1;-1)$, $B(2;1;;3)$, $C(-3;-1;1)$ et $D(7;3;-1)$.

Affirmation 2 : « Les points A, B, C et D sont coplanaires. »

3. Dans un repère de l'espace, soit d la droite passant par le point $A(-3;7;-12)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;-2;5)$.

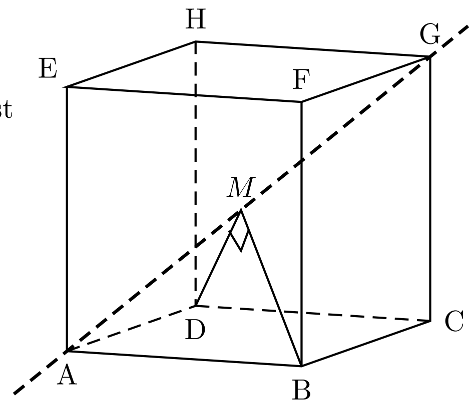
Soit d' la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -4t+3 \\ z = 10t-2. \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$

Affirmation 3 : « Les droites d et d' sont confondues. »

4. On considère un cube $ABCDEFGH$. L'espace est muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$

Une représentation paramétrique de la droite (AG) est $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

On considère un point M de la droite (AG).



Affirmation 4 : « Il y a exactement deux positions du point M sur la droite (AG) telles que les droites (MB) et (MD) soient orthogonales. »