Devoir n$^{\text{o}}$7 - Fonctions - Géométrie dans l'Espace - TSpé maths

24 février 2021 - 2 h

On traitera **au choix** l'exercice 1 ou l'exercice 2.

Exercice 1 (10 pts) : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$,
   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel.
   Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.

   On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

   b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g.
   c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 2 (10 pts) : Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x) + 2x - 2$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0;+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = (2 - \frac{1}{x})(\ln(x) - 1)$$

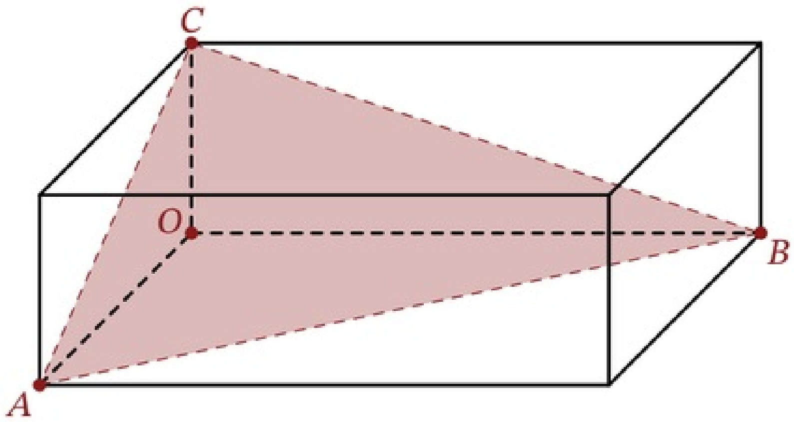
1. a) On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$. (les limites ne sont pas demandées)
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée F est la fonction f.
Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$.
2. La courbe représentative $\mathscr{C}_F$ admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (10 pts) : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A de coordonnées $(2;0;0)$, B de coordonnées $(0;3;0)$ et C de coordonnées $(0;0;1)$.



1. a) En utilisant un produit scalaire, donner une valeur arrondie de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré.
   b) Le triangle ABC est-il rectangle en C ?

L'objectif de la suite de l'exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

2. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(3;2;6)$ est normal au plan (ABC).
   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

3. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).
   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
   b) Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49})$.
   c) Calculer la distance OH.

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$,
   où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide $OABC$, déterminer l'aire du triangle ABC.