Correction du dev n°9 - Trigo

Ex 1 : $f(x) = (1 - \sin x)\cos x$ sur $I = [0 ; \pi]$ 16

1) $f = uv$ $\quad f' = u'v + uv'$

$$f'(x) = -\cos x \cos x + (1 - \sin x)(-\sin x)$$
$$= -(\cos x)^2 - \sin x + (\sin x)^2$$
$$= (\sin x)^2 - (\cos x)^2 - \sin x$$

1,5

2) $(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 2(\sin x)^2 - 2\sin x + \sin x - 1$
$$= 2(\sin x)^2 - \sin x - 1$$
$$= 2(\sin x)^2 - \sin x - \left((\cos x)^2 + (\sin x)^2\right)$$
$$= (\sin x)^2 - (\cos x)^2 - \sin x = f'(x)$$

2

3) $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $\sin x - 1 \leq 0$

sur $[0 ; \pi]$, $\sin x \geq 0$ donc $2\sin x + 1 > 0$ 1,5

4) Alors $f'(x) \leq 0$ et

x	0		π
$f(x)$	1	$\searrow$	-1

1

Ex 2 : $f(x) = x\tan x = \dfrac{x\sin x}{\cos x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$

1) $f(-x) = \dfrac{-x\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-x \times (-\sin x)}{\cos x} = \dfrac{x\sin x}{\cos x} = f(x)$

donc f est paire 1

2) f est dérivable comme produit et quotient

$u(x) = x\sin x \quad u'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

$v(x) = \cos x \quad v'(x) = -\sin(x)$

$$f'(x) = \frac{(\sin(x) + x\cos(x))\cos x - x\sin x\,(-\sin x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{\sin(x)\cos(x) + x(\cos x)^2 + x(\sin x)^2}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\sin(x)\cos(x) + x\left((\cos x)^2 + (\sin x)^2\right)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin(x)\cos(x) + x}{(\cos x)^2} = \frac{2\sin(x)\cos(x) + 2x}{2\cos(x)^2}$$

$$= \boxed{\frac{\sin(2x) + 2x}{2\cos^2(x)}} \qquad 2$$

3) Soit $g(x) = 2x + \sin(2x)$ sur $[0 ; \pi/2[$

$g'(x) = 2 + 2\cos(2x) = 2(1 + \cos(2x))$ 1

1 $\cos(2x) \geq -1 \Rightarrow 1 + \cos(2x) \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0$

alors g est croissante sur $[0 ; \pi/2[$

$g(0) = 0$ le minimum pour g sur $[0 ; \pi/2[$

1 donc $g(x) \geq 0$

4) on $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\cos^2(x)}$ 1 $\cos^2(x) > 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

Tab

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$	0	$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

1

Bonus

Par produit $\lim\limits_{x \to \pi/2} x\sin x = \pi/2$

+0.5 $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} \cos x = 0^+$

Par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = +\infty}$

puisque f est paire, par symétrie, on obtient

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

1

Ex3 : 1) sur $[0;2\pi[$

$\sin(2x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \iff \sin(2x) = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ $(k, k' \in \mathbb{Z})$

$\iff 2x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{-2\pi}{3} + 2k'\pi$

$\iff x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{-\pi}{3} + k'\pi$

$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{3} ; \frac{11\pi}{6} \right\}$ 2

17

2) sur $]-\pi;\pi]$

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \iff \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{5} + 2k'\pi \end{cases}$

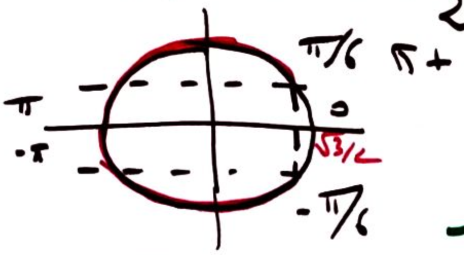
$(k, k' \in \mathbb{Z})$

$\iff x = \frac{-\pi}{20} + 2k\pi$ ou $x = \frac{-9\pi}{20} + 2k'\pi$

$S = \left\{ \frac{-9\pi}{20} ; \frac{-\pi}{20} \right\}$ 1,5

3) sur $]-\pi;\pi]$ $2\cos x - \sqrt{3} < 0 \iff \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S = \left]-\pi ; \frac{-\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6} ; \pi\right]$

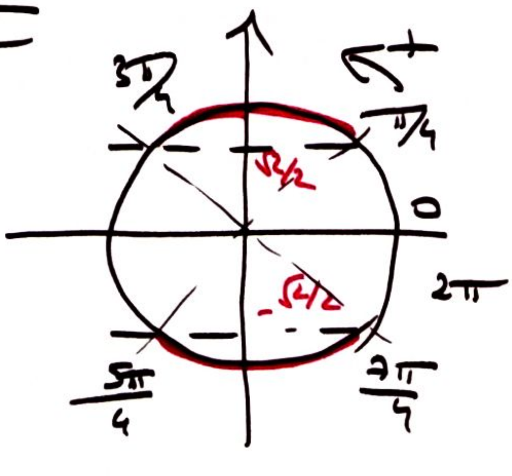


1,5

4) sur $[0;2\pi[$ $\sin^2(x) \geq 1/2$

$\iff \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$S = \left[\pi/4 ; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} ; \frac{7\pi}{4}\right]$



2