Devoir n°10 - Épreuve d'enseignement de spécialité mathématiques

28 fev 2022 - 2h

Exercice 1 (5 pts) : *Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

1. Un élève de première générale choisit trois spécialités parmi les douze proposées.
   Le nombre de combinaisons possibles est :
   Affirmation 1 : 1320

2. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B.
   Une étude statistique montre que 2,8 % des puces ont le défaut A, 2,2 % des puces ont le défaut B et, heureusement, 95,4 % des puces n'ont aucun des deux défauts.
   La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est :
   Affirmation 2 : 0,004

   Dans les questions suivantes, on se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ de l'espace.

3. On considère les points A, B et C avec $A(-2\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et $C(4\ ;\ 2\ ;\ 0)$.
   On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   Soit la droite d dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 3+2t \end{array}\right.$
   Affirmation 3 : la droite d est orthogonale au plan (ABC).

4. Soient les points $E(2\ ;\ 1\ ;\ -3)$ et $F(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$.
   Affirmation 4 : Une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2t \\ y & = & -3+4t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 7-10t \end{array}\right.$$

5. Soit la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+2 \\ y & = & -2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & 3t-1 \end{array}\right.$$
   Affirmation 5 : la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$ $(I, \vec{u}, \vec{v})$ avec $I(3;0;0)$, $\vec{u}(1;-1;1)$ et $\vec{v}(0;1;-2)$

Exercice 2 (7,5 pts) : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0~;~+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
3. Dresser le un tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
4. Soit m un nombre réel.
   Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.
   b) On note g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
   Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g sur $[0~;~+\infty[$.
   c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 3 (7,5 pts) : Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique. Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n\,(1-0,15u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
   c) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace()
    u = 0,6
    n = 0
    while u > 0,02
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
    return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.