Devoir n°3 - Suites - TS

7 octobre 2021 - 1h20

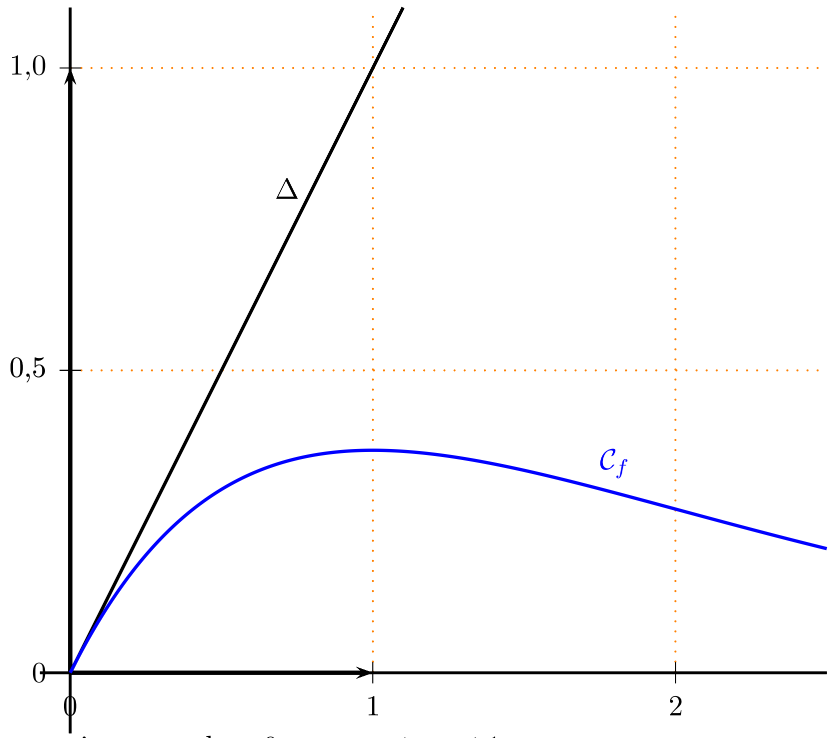
Exercice 1 (9,5 points) :

Partie A : On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et en déduire les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.



1. En utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ, placer les termes u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses. Laisser les tracés apparents.

   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

3. a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $f(x) = x$.
   Résoudre cette équation et déterminer la valeur de cette limite.

Partie C :

Soit la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il calcule S_{100}.

Déclaration des variables :
    S et u sont des nombres réels
    k est un nombre entier
Initialisation :
    u prend la valeur ......
    S prend la valeur ......
Traitement :
    Pour k variant de 1 à ....
        u prend la valeur $u \times \mathrm{e}^{-u}$
        S prend la valeur ....
    Fin Pour
    Afficher ......

Exercice 2 (10,5 points) : En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n) :
   u = 1 000
   for i in range(n) :
      u = 0,9*u + 250
   return u
```

4. a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2\,500$.
   b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et vérifier que :

$$u_n = -1\,500 \times 0,9^n + 2\,500.$$

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

6. En quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200 ?

Exercice 3 (Bonus) : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + 3^n - 7$$

On considère la suite auxiliaire (v_n) telle que, pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
On pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer cette somme de deux manières différentes. (en fonction de u_n, puis en fonction de n)
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.