Devoir n°5 - Limites, Continuité et Dérivabilité - TSpé maths

15 novembre 2021 - 2h

Exercice 1 (3 pts) : Soit

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ \\ \dfrac{2x-1}{3x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

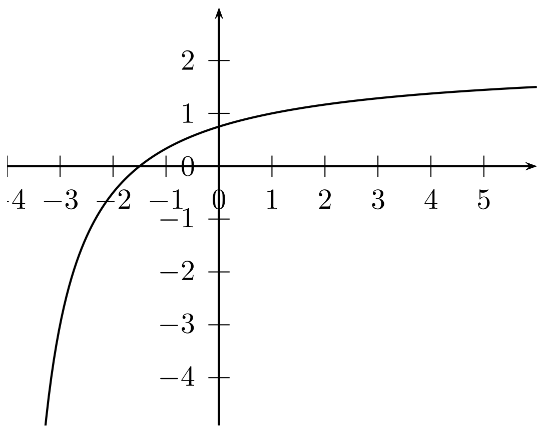
La fonction f est-elle continue sur $[0; +\infty[$?

Exercice 2 (3 pts) : Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \\ \dfrac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (7 pts) :



Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit f la fonction définie sur $]-4\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée ci-contre.

1. A l'aide du graphe, conjecturer sur le sens de variation de (u_n) et la convergence de (u_n).

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $]-4\ ;\ +\infty[$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

4. Justifier la convergence de la suite (w_n), puis déterminer sa limite.

Exercice 4 (11 pts) : Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ (on pourra utiliser le théorème pour les fonctions polynômes).
2. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note α.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{4x^2 - 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra utiliser le théorème pour les fonctions rationnelles).
   b) Déterminer la limite de f en $\frac{1}{2}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2 - 1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.

Partie C : Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x$.

1. Montrer que $f(x) - \frac{1}{4}x = \dfrac{x + 4}{4(4x^2 - 1)}$ sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$.
2. a) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
   b) Pour tout réel $x > \frac{1}{2}$, on considère les points M et N d'abscisses x respectivement sur $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
   Que peut-on conjecturer sur la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?

Partie D :

1. On souhaite déterminer un encadrement de α par balayage.
   Parmi les 3 algorithmes suivants, un seul fonctionne ; préciser lequel et pourquoi.

Programme 1

```
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h

print(a,"< alpha <",a+h)
```

Programme 2

```
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)<0:
    a=a+h

print(a,"< alpha < ",a+h)
```

Programme 3

```
h=0.01
a=1
while g(a)*g(a+h)>0:
    a=a+h
    print(a,"< alpha <",a+
      h)
```

2. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \frac{3}{8}\alpha$; en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.