Devoir n^{o}6 - Convexité, Fonction Exponentielle - TSpé maths

9 décembre 2021 - 1h

Exercice 1 (8 pts) : On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[-2;2]$ par

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)\mathrm{e}^x$$

1. Déterminer f' la fonction dérivée de f sur $[-2;2]$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. On note f'' la fonction dérivée de f' sur $[-2;2]$. Montrer que

$$f''(x) = (x^2 - 1)\mathrm{e}^x$$

4. Étudier le signe de f'' et en déduire la convexité de f.
5. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un (ou plusieurs) point(s) d'inflexion ? Si oui, donner ses (leurs) coordonnées.

Exercice 2 (12 pts) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + 1 + x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_{\{}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Déterminer f', la dérivée de f, et montrer que $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$ (la dérivée seconde de f).
   b) Etudier les variations de f'.
   c) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$; donner un encadrement à 10^{-2} de α.
4. a) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}_{\{}$ au point d'abscisse 0.
   b) En déduire que, pour tout $x \leq 2$, on a $f(x) \leq 2x + 1$. (utiliser la question 1)b))
5. a) Prouver que, sur $\mathbb{R}$

$$\text{résoudre l'équation } f(x) = 2 \iff \text{résoudre l'équation } \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = x$$

   b) Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0;1]$ par

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

   c) Donner la valeur de $h(\alpha)$ en fonction de α.