Devoir n°7 - Fonction Ln - TSpé maths

13 janvier 2022 - 1h

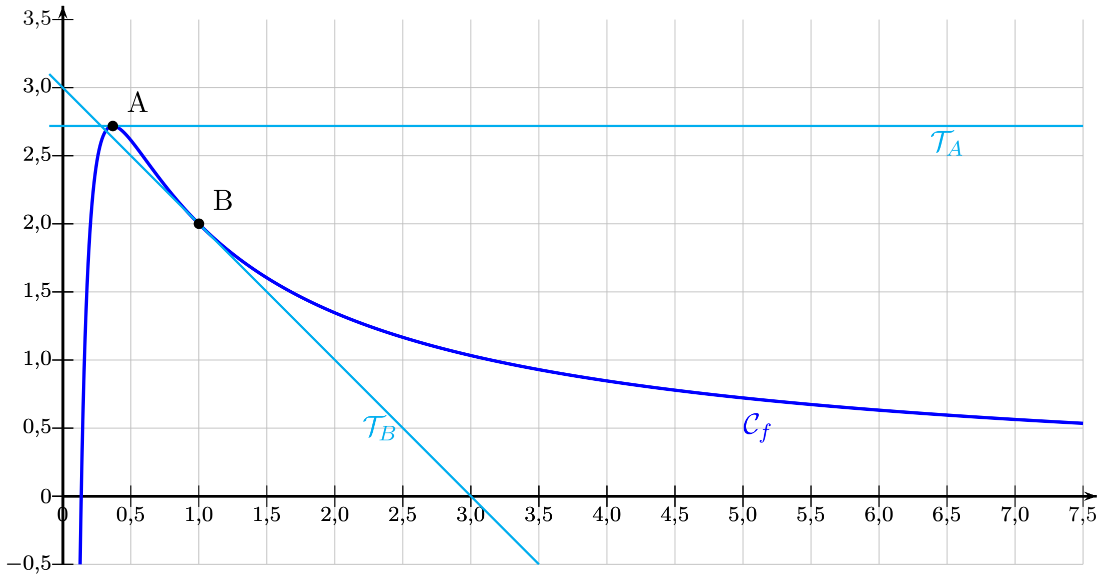
Exercice 1 (11 pts) : On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e}\ ;\ e\right)$;
- la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\ ;\ 2)$.

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\ ;\ 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$.
2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Partie II : On admet que la fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer les limites de f quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. On note f'' la fonction dérivée seconde de f. On admet que, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1 + 2\ln(x)}{x^3}$
   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 2 (9 pts) : On considère la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f.
4. a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.