Devoir n$^{\text{o}}$8 - Equations Différentielles - TSpé maths

27 janvier 2022 - 1h

Exercice 1 (12 pts) :

Partie I : Considérons l'équation différentielle

$$(E) : y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. a) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.

   b) Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II : Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{(1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t})^2}$ pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$.
3. a) Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III : Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre, et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.

On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.

Interpréter dans ce contexte, la valeur $p(0)$, la valeur approchée de α de la question II 3. b., ainsi que la limite de la question II 1.

Exercice 2 (8 pts) : On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^x$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\mathrm{e}^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

   a) Montrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $(E_0) : y' = y$.
   On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

   b) Résoudre l'équation différentielle (E_0), puis résoudre l'équation différentielle (E).
3. On admet $u''(x) = (x^2 + 4x + 2)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.