

$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right)$  sur  $[0; +\infty[$

/M

Partie A: 1)  $\frac{3x+1}{x+1} = \frac{x(3+1/x)}{x(1+1/x)} = \frac{3+1/x}{1+1/x} \quad x \neq 0$

Par sommes et quotients  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3+1/x}{1+1/x} \right) = 3$  (Par composition  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 3$ )

$X = \frac{3x+1}{x+1} \quad \lim_{X \rightarrow 3} \ln X = \ln 3$

La droite d'équation  $y = \ln 3$  est asymptote horizontale à  $f$  en  $+\infty$

1,25

9,5

2) a)  $u(x) = \frac{3x+1}{x+1} \quad u'(x) = \frac{3(x+1) - (3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$f = \ln u$   
 $f' = \frac{u'}{u}$  donc  $f'(x) = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{3x+1}$

soit  $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$

1,5

b) sur  $[0; +\infty[$

$x+1 > 0$  et  $3x+1 > 0$  donc  $f'(x) > 0$

et  $f$  strictement croissante sur  $[0; +\infty[$

9,5

Partie B:  $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$

1) on veut montrer que  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$

2,5

• initialisation: pour  $n=0$

$u_0 = 3$  et  $u_1 = f(u_0) = f(3) = \ln(5/2) = 0,5$

on a  $\frac{1}{2} \leq u_1 \leq u_0$  vrai pour  $n=0$

• hérédité: soit  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$   
 $f$  croissante sur  $[0; +\infty[$

donc  $f(1/2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

$f(1/2) = \ln(5/3) = 0,51$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

Donc  $\frac{1}{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$  vrai au rang  $(n+1)$

- conclusion: c'est vrai pour  $n=0$  et c'est héréditaire donc  $\frac{1}{2} \in u_{n+1} \in u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

2) D'après la question précédente  $(u_n)$  décroissante et minorée par  $\frac{1}{2}$ : par théorème,  $(u_n)$  converge vers l. 1  
 Par passage à la limite dans l'inégalité on a  $l \geq \frac{1}{2} > 0$

Partie C: on admet que  $f(l) = l$ ;  $g(x) = f(x) - x$  sur  $[0; +\infty[$

1) • sur  $[0; x_0]$ ,  $g$  strictement croissante avec  $g(0) = 0$  le minimum, donc l'équation  $g(x) = 0$  admet pour seule solution 0 qui n'est pas strictement positive 95

• sur  $[x_0; +\infty[$ ,  $g$  continue (différence de fonctions continues),  $g$  strictement décroissante 925  
 $g(x_0) = 9,88 (> 0)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  sur  $[x_0; +\infty[$ :  $\alpha \geq x_0 > 0$

Au total, une seule solution strictement positive sur  $[0; +\infty[$ :  $\alpha$ . 925

2) a)  $x \leftarrow 0,22$   
 Tant que  $g(x) > 0$  faire 95  
 $x \leftarrow x + 0,01$   
 Fin Tant que

b) d'après la calculatrice  $g(0,52) > 0$  donc la  $g(0,53) < 0$  dernière valeur prise par  $x$  est 953 95

3)  $f(l) = l \Leftrightarrow f(l) - l = 0 \Leftrightarrow g(l) = 0$   
 or on sait que  $l > 0$  donc  $l = \alpha = 9,53$  975  
 par exact