Devoir n°11 - Fonctions - Suites - TSpé

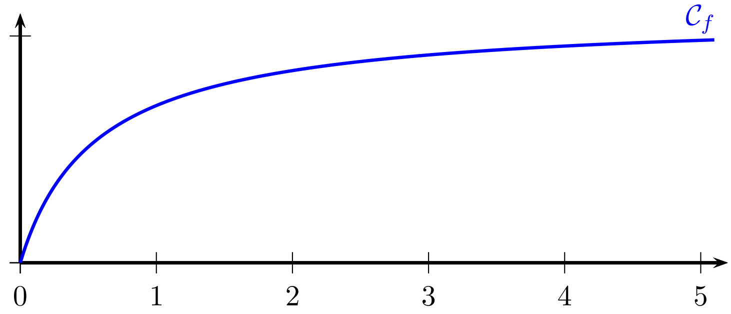
29 février 2024 - 45 min

Exercice 1 (Nouvelle-Calédonie nov 2019 - 10 pts) :

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. a) Déterminer $f'(x)$ pour tout nombre réel x positif ou nul.
   b) En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$ où $x_0 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0		x_0		$+\infty$
Variations de la fonction g	0	$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.
2.
   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à $0,01$ près.
   b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

```
x ← 0,22
Tant que ........faire
        x ← x + 0,01
Fin de Tant que
```

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).