

Correction du deu 13 - Tsp

Ex 1: $f(x) = \cos x + \sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$

1) a) $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) + \sin^2(x+2\pi)$
 $= \cos x + \sin^2 x = f(x)$

car $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont 2π -périodiques

b) on peut donc étudier f sur une période.
 soit $[-\pi; \pi]$

2) a) $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x)$
 $= \cos(x) + (-\sin(x))^2$
 $= \cos(x) + \sin^2(x)$
 $= f(x)$

donc f est paire

b) f est alors symétrique par rapport à (Oy)
 on peut donc étudier f sur $[0; \pi]$.

3) $f'(x) = -\sin x + 2 \sin x \cos x$
 $= \sin x (2 \cos x - 1)$

4) sur $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 \cos x - 1$
 $2 \cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \cos x > 1 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2}$

$S = [0; \frac{\pi}{3}]$

Donc

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	1	$\nearrow \frac{5}{4}$	$\searrow -1$	

Par symétrie

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f(x)$	-1	$\nearrow \frac{5}{4}$	1	$\searrow \frac{5}{4}$	-1

$f(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) + \sin^2(\frac{\pi}{3})$
 $= \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$

Ex 2: (E) $y' + 0,04y = 0,8$ $\Leftrightarrow y' = -0,04y + 0,8$

1) on reconnaît l'équation $y' = ay + b$
avec $a = -0,04$ et $b = 0,8$

$$\frac{-b}{a} = \frac{-0,8}{-0,04} = \frac{80}{4} = 20$$

$$S = \left\{ K e^{-0,04t} + 20 \mid K \in \mathbb{R} \right\}$$

g solution de (E) donc $g(t) = K e^{-0,04t} + 20$

$$g(0) = 100 \Leftrightarrow K + 20 = 100 \Leftrightarrow K = 80$$

$$\underline{g(t) = 80 e^{-0,04t} + 20} \quad t \in [0; +\infty[\text{ en minutes.}$$

2) a) $g(30) = 80 e^{-1,2} + 20 \approx 44$

$$g'(t) = -3,2 e^{-0,04t} \quad g'(t) < 0$$

g strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

Au bout de 30 min, la température est bien supérieure à 37°C . Le grand-mère de théo a mal évalué le temps nécessaire.

b) $g(t) \leq 37$

$$\Leftrightarrow 80 e^{-0,04t} + 20 \leq 37$$

$$\Leftrightarrow 80 e^{-0,04t} \leq 17$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,04t} \leq \frac{17}{80}$$

$$\Leftrightarrow -0,04t \leq \ln\left(\frac{17}{80}\right)$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{-1}{0,04} \ln\left(\frac{17}{80}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{t \geq 25 \ln\left(\frac{80}{17}\right)}$$

$$25 \ln\left(\frac{80}{17}\right) \approx 38,72$$

$\rightarrow$ donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$t = 38,73 \text{ min}$$

$$38,73 \times 60 = 2323,8 \text{ s}$$

La température sera inférieure à 37°C au bout de 38 min 44 s.

Ex 3 : (E) : $y' = y + 2xe^x$

(E') : $y' = y$

1) $u(x) = x^2 e^x$ sur $\mathbb{R}$

$$u'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (2+x)xe^x$$

donc $u'(x) = 2xe^x + u(x)$

On a bien u solution de (E)

2) $g(x) = f(x) - u(x)$ sur $\mathbb{R}$

(a) f solution de (E)

$$\Leftrightarrow f' = f + 2xe^x$$

or $u' = u + 2xe^x$

donc $f' = f + (u' - u)$

$$\Leftrightarrow f' - u' = f - u$$

$$\Leftrightarrow (f - u)' = f - u$$

$$\Leftrightarrow g' = g$$

$$\Leftrightarrow g \text{ solution de (E')}$$

Réciproquement

g solution de (E')

$$\Leftrightarrow g' = g$$

$$\Leftrightarrow (f - u)' = f - u$$

$$\Leftrightarrow f' - u' = f - u$$

$$\Leftrightarrow f' - f = u' - u$$

or $u' = u + 2xe^x$

donc $f' - f = 2xe^x$

$$\Leftrightarrow f' = f + 2xe^x$$

$$\Leftrightarrow f \text{ solution de (E)}$$

On a bien f solution de (E) $\Leftrightarrow g$ solution de (E')

b) (E') : $y' = y$ on reconnaît l'équation $y' = ay$ avec $a = 1$

Donc $S = \{ K e^x / K \in \mathbb{R} \}$

c) g solution de (E') donc $g(x) = K e^x$

et $f(x) = g(x) + u(x) = K e^x + x^2 e^x$
 $= (K + x^2) e^x$

Les solutions de (E) sont les fonctions du type $(K + x^2) e^x$ avec $K \in \mathbb{R}$