Devoir n°13 - Trigonométrie - Equations différentielles - TSpé

15 avril 2024 - 1h

Exercice 1 (6,5 pts) : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x + \sin^2 x$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. a) Montrer que f est périodique de période 2π.
   b) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.
2. a) Montrer que f est paire.
   b) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0;\pi]$.
3. Déterminer $f'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0;\pi]$ puis sur $[-\pi;\pi]$.

Exercice 2 (7 pts) : La grand-mère de Théo sort un gratin du four, le plat étant alors à 100 °C. Elle conseille à son petit-fils de ne pas le toucher afin de ne pas se brûler, et de laisser le plat se refroidir dans la cuisine dont la température ambiante est supposée constante à 20 °C.
Théo lui rétorque que quand il sera à 37 °C il pourra le toucher sans risque ; et sa grand-mère lui répond qu'il lui faudra attendre 30 minutes pour cela.
La température du plat est donnée par une fonction g dépendant du temps t, exprimé en minutes, qui est solution de l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + 0,04y = 0,8$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) et donner sa solution particulière g définie par sa condition initiale $g(0) = 100$.
2. En utilisant l'expression de $g(t)$ trouvée, répondre aux questions suivantes :
   a) La grand-mère de Théo a-t-elle bien évalué le temps nécessaire pour atteindre 37°C ?
   b) Quelle est la valeur exacte du temps nécessaire pour obtenir cette température ?
   En donner une valeur arrondie à la seconde près.

Exercice 3 (6,5 pts) : On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^x$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\mathrm{e}^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

   a) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = y$.
   b) Résoudre (E') sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).