

Question du dev 14 - Type

Ex 1: $I = \int_{-1}^0 \frac{1}{(3x-1)^3} dx$

165

$$f(x) = \frac{1}{(3x-1)^3} = (3x-1)^{-3} = \frac{1}{3} \times 3 (3x-1)^{-3}$$

$$F(x) = \frac{1}{3} \frac{(3x-1)^{-2}}{-2} = \frac{-1}{6(3x-1)^2} \quad \text{une primitive de } f$$

donc $I = F(0) - F(-1) = \frac{-1}{6} - \left(\frac{-1}{6 \times 16} \right) = \frac{-15}{96} = \frac{-5}{32}$

$J = \int_0^2 4(2x+1)e^{x^2+x-1} dx$

$u(x) = x^2+x-1$ donc $J = \left[4 e^{x^2+x-1} \right]_0^2$

$u'(x) = 2x+1$

$= 4e^5 - 4e^{-1} = \boxed{4(e^5 - e^{-1})}$

$K = \int_2^4 x^2 \ln x dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln x \right]_2^4 - \int_2^4 \frac{1}{3} x^3 \times \frac{1}{x} dx$

$u'(x) = x^2 \quad u(x) = \frac{1}{3} x^3$

$v(x) = \ln x \quad v'(x) = \frac{1}{x}$

donc $K = \frac{64}{3} \ln 4 - \frac{8}{3} \ln 2 - \int_2^4 \frac{1}{3} x^2 dx$

$= \frac{428}{3} \ln 2 - \frac{8}{3} \ln 2 - \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_2^4$

$= \frac{420}{3} \ln 2 - \left(\frac{64-8}{9} \right) = \boxed{40 \ln 2 - \frac{56}{9}}$

Ex 2: $\begin{cases} f(x) = e^{-x} (\cos x + \sin x + 1) \\ g(x) = -e^x \cos x \end{cases}$

sur $\mathbb{R}$

1/13,5

Partie A: 1) $-1 \leq \cos x \leq 1$
 $\Leftrightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1$ donc $-1 \leq -\cos x + \sin x + 1 \leq 3$
 et $-1 \leq \sin x \leq 1$ $e^{-x} > 0$
 on a bien $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$ 1

2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

Par quotient et produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-x} = 0$

D'après le théorème des gendarmes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 3,5

3) $f = uv$ $f' = u'v + uv'$

$f'(x) = -e^{-x} (-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x} (\sin x + \cos x)$
 $= e^{-x} (\cos x - \sin x - 1 + \sin x + \cos x)$
 $= e^{-x} (2\cos x - 1)$ 1

4) sur $[-\pi, \pi]$

a) $2\cos x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

q.s. $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$

q.s. $f'(x)$ | $- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$

b) x | $-\pi \quad -\frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} \quad \pi$

$f(x)$ | $2e^\pi \quad f(-\frac{\pi}{3}) \quad f(\frac{\pi}{3}) \quad 2e^{-\pi}$

1

$f(\pi) = e^{-\pi} (1 + 1) = 2e^{-\pi}$

$f(-\pi) = 2e^\pi$

$f(\frac{\pi}{3}) = e^{-\frac{\pi}{3}} (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{3}}$

$f(-\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}} (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} e^{\frac{\pi}{3}}$

Partie B: 1) $h(x) = f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$

$$= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + e^{-x} \cos x$$

$$= e^{-x}(\sin x + 1)$$

$e^{-x} > 0$ et $\sin x \geq -1$ ($\Rightarrow \sin x + 1 \geq 0$)

donc $h(x) \geq 0$ alors φ est toujours au-dessus de φ_0 sur $\mathbb{R}$

$$2) \quad H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

a) $H'(x) = \left(-\frac{1}{2}(-\sin x) - \frac{1}{2}\cos x \right) e^{-x} + \left(-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x - 1 \right) (-e^{-x})$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + 1 \right) e^{-x}$$
$$= (\sin x + 1) e^{-x} = h(x)$$

Donc H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$

b) $\left\{ \begin{array}{l} h \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ comme somme de fonctions continues} \\ h(x) \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \end{array} \right.$

$$-\frac{\pi}{2} \approx -1,6 \text{ et } \frac{3\pi}{2} \approx 4,7$$

$$\text{donc } A(D) = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} h(x) dx = H(3\pi/2) - H(-\pi/2)$$

$$H(3\pi/2) = \left(\frac{1}{2} - 1 \right) e^{-3\pi/2} = -\frac{1}{2} e^{-3\pi/2}$$

$$H(-\pi/2) = \frac{1}{2} e^{\pi/2}$$

$$\text{alors } A(D) = -\frac{1}{2} e^{-3\pi/2} + \frac{1}{2} e^{\pi/2} = \frac{e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}}{2} \quad \text{u.a.}$$

$$1 \text{ u.a.} = 2^2 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{Donc } A(D) = 2(e^{\pi/2} - e^{-3\pi/2}) \text{ cm}^2$$
$$\approx 9,60 \text{ cm}^2$$

10,5 dessin

Devoir n°14 - Intégration - TSpé

29 avril 2024 - 1h

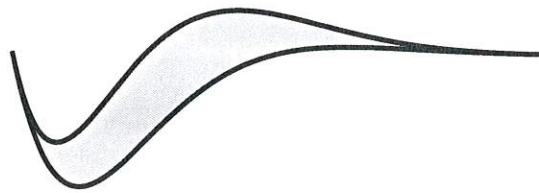
Exercice 1 (6 pts) : Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^0 \frac{1}{(3x-1)^3} dx$$

$$J = \int_0^2 4(2x+1)e^{x^2+x-1} dx$$

$$K = \int_2^4 x^2 \ln x dx \quad (\text{par intégration par parties})$$

Exercice 2 (14 pts) : Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x} \cos x$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude de la fonction f :

- Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$.
- En déduire la limite de f en $+\infty$.
- Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f .
- Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 - Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 - En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B - Aire du logo : On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est de 2 centimètres.

- Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}$$

On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

- Montrer que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
- Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique.
- Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .

