

Devoir n°14 - Intégration - TSpé

29 avril 2024 - 1h

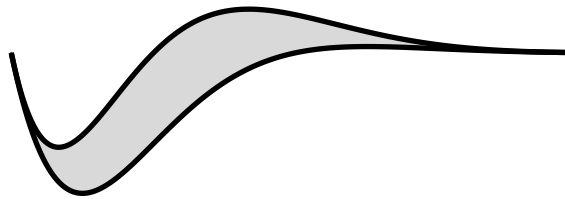
Exercice 1 (6 pts) : Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_{-1}^0 \frac{1}{(3x-1)^3} dx$$

$$J = \int_0^2 4(2x+1)e^{x^2+x-1} dx$$

$$K = \int_2^4 x^2 \ln x dx \quad (\text{par intégration par parties})$$

Exercice 2 (14 pts) : Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x} \cos x$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie A - Étude de la fonction f :

- Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$.
- En déduire la limite de f en $+\infty$.
- Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$ où f' est la fonction dérivée de f .
- Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 - Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$.
 - En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.

Partie B - Aire du logo : On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité graphique est de 2 centimètres.

- Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.
- Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}$$

On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la courbe $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

- Montrer que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
- Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique.
- Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .

