

Ex 1 : $I = \int_1^2 \frac{6x}{(x^2+4)^4} dx$

$f(x) = 6x(x^2+4)^{-4} = 3 \times 2x(x^2+4)^{-4}$

$F(x) = 3 \frac{(x^2+4)^{-3}}{-3} = -\frac{1}{(x^2+4)^3}$

donc $I = F(2) - F(1) = -\frac{1}{8^3} + \frac{1}{5^3} = \frac{-1}{512} + \frac{1}{125} = \frac{387}{64000}$

$J = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{-\cos x}{\sin x} dx = \left[-\ln(\sin x) \right]_{\pi/3}^{\pi/2}$

$= -\ln 1 + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$K = \int_{-1}^1 3x e^{2x} dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} x \times 2e^{2x} dx$

$= \left[\frac{3}{2} x e^{2x} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{3}{2} e^{2x} dx$

$= \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{2} e^{-2} - \left[\frac{3}{4} e^{2x} \right]_{-1}^1$

$= \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{2} e^{-2} - \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{4} e^{-2}$

$= \frac{3e^2 + 9e^{-2}}{4} = \frac{3}{4} (e^2 + 3e^{-2})$

$$\text{Ex 2 : } \begin{cases} I_0 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx \\ I_m = \int_0^{1/2} \frac{x^m}{1-x} dx \quad (m \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

$$\rightarrow \textcircled{a} I_0 = [-\ln(1-x)]_0^{1/2} = -\ln(1/2) + \ln 1 = \ln 2$$

$$\textcircled{b} I_0 - I_1 = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{1/2} \frac{x}{1-x} dx$$

par linéarité $= \int_0^{1/2} \frac{1-x}{1-x} dx = \int_0^{1/2} 1 dx$

$$= [x]_0^{1/2} = 1/2$$

donc $I_1 = I_0 - 1/2 = \ln 2 - 1/2$

$$2) \textcircled{a} \text{ pour } n=0, I_0 - I_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{(1/2)^{0+1}}{0+1} = 1/2$$

l'égalité est vérifiée

pour $m \in \mathbb{N}^*$, $I_m - I_{m+1} = \int_0^{1/2} \frac{x^m - x^{m+1}}{1-x} dx$

par linéarité

$$\Rightarrow I_m - I_{m+1} = \int_0^{1/2} x^m \left(\frac{1-x}{1-x} \right) dx = \int_0^{1/2} x^m dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1} \right]_0^{1/2}$$

$$\Rightarrow I_m - I_{m+1} = \frac{(1/2)^{m+1}}{m+1}$$

on a donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $I_m - I_{m+1} = \frac{(1/2)^{m+1}}{m+1}$

$$\begin{aligned} m+1 > 0 & \quad \text{donc } I_m - I_{m+1} > 0 \\ (1/2)^{m+1} > 0 & \quad \Rightarrow I_m > I_{m+1} \end{aligned}$$

La suite (I_m) est décroissante

$\textcircled{b} x \mapsto \frac{x^m}{1-x}$ continue sur $[0; 1/2]$ comme quotient pour $m \in \mathbb{N}^*$

et $g(x) = \frac{1}{1-x}$ aussi

$f_m(x)$ et $g(x)$ positives sur $[0; 1/2]$

$$0 < \frac{1}{2}$$

donc $\boxed{0 \leq I_n \text{ pour } n \in \mathbb{N}}$

1,5

(I_n) est décroissante et minorée par 0
Par théorème, elle converge.

0,75

3) pour $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$
sur $[0; \frac{1}{2}]$.

(a) f_n continue pour $n \in \mathbb{N}^*$
 $0 < \frac{1}{2}$

Par passage à l'intégrale dans l'inégalité
on a $0 \times (\frac{1}{2} - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^{n+1}} (\frac{1}{2} - 0)$

$$\Leftrightarrow \boxed{0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}}$$

2,5

(b) $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ - $1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

9 après le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0}$$

1

4) $S_n = \frac{1}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + \dots + \frac{(\frac{1}{2})^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

@ $S_n = (I_0 - I_1) + (I_1 - I_2) + \dots + (I_{n-1} - I_n)$
d'après la question 2 @

$$\Leftrightarrow \boxed{S_n = I_0 - I_n}$$

1,5

(b) $S_n = \ln 2 - I_n$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Par somme
 $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln 2}$

0,5