

Devoir n°1 - Dérivées et Raisonnement par Récurrence - TSpé maths

21 septembre 2023 - 30 min

Exercice 1 (^{4.5}~~4~~ pts) : Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x) = (x^2 - 2x + 5)e^{-3x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = 3x\sqrt{1-4x} \quad \text{sur }]-\infty; \frac{1}{4}[$$

$$f_2(x) = \frac{1-2e^x}{3e^x+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{(4x^2+1)^3} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Exercice 2 (^{5.5}~~6~~ pts) : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ pour tout entier naturel n .

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2^n + n$$

Ex 1 : • $f_1(x) = (x^2 - 2x + 5)e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$ $f_1 = uv$ $f_1' = u'v + uv'$
 $f_1'(x) = (2x - 2)e^{-3x} + (x^2 - 2x + 5) \times (-3e^{-3x})$
 $= (2x - 2 - 3x^2 + 6x - 15)e^{-3x}$
 $= (-3x^2 + 8x - 17)e^{-3x}$ du signe de $(-3x^2 + 8x - 17)$

• $f_2(x) = \frac{1-2e^x}{3e^x+1}$ sur $\mathbb{R}$ $f_2 = \frac{u}{v}$ $f_2' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
 $f_2'(x) = \frac{-2e^x(3e^x+1) - (1-2e^x) \times 3e^x}{(3e^x+1)^2} = \frac{-5e^x}{(3e^x+1)^2}$ $f_2'(x) < 0$

• $f_3(x) = 3x\sqrt{1-4x}$ sur $] -\infty; \frac{1}{4}[$ $f_3 = uv$ $f_3' = u'v + uv'$
 $f_3'(x) = 3\sqrt{1-4x} + 3x \times \frac{-4}{2\sqrt{1-4x}} = \frac{3(1-4x) - 6x}{\sqrt{1-4x}}$
 donc $f_3'(x) = \frac{3-18x}{\sqrt{1-4x}} = \frac{3(1-6x)}{\sqrt{1-4x}}$ du signe de $(1-6x)$

• $f_4(x) = \frac{1}{(4x^2+1)^3}$ sur $\mathbb{R}$ $f_4 = u^{-3}$ $f_4' = -3u^{-4} \times u'$
 $f_4'(x) = -3(4x^2+1)^{-4} \times 8x = \frac{-24x}{(4x^2+1)^4}$ du signe de $-24x$

Devoir n°1 - Dérivées et Raisonnement par Récurrence - TSpé maths

21 septembre 2023 - 30 min

Exercice 1 ^{4,5} (4 pts) : Déterminer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x) = (x^2 - 2x + 5)e^{-3x} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = 3x\sqrt{1-4x} \quad \text{sur }]-\infty; \frac{1}{4}[$$

$$f_2(x) = \frac{1-2e^x}{3e^x+1} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{(4x^2+1)^3} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Exercice 2 ^{5,5} (6 pts) : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n - n + 1$ pour tout entier naturel n .

Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 2^n + n$$

Ex 2 : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{m+1} = 2u_m - m + 1 \quad \text{pour } m \in \mathbb{N} \end{cases}$

on veut montrer P_m : " $u_m = 2^m + m$ "
pour $m \in \mathbb{N}$ 9,5

initialisation : pour $m=0$

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 2^0 + 0 = 1 + 0 = 1$$

P_0 est vérifiée

1

hérédité : soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que P_m est vraie, c'est à dire $u_m = 2^m + m$
on veut montrer que P_{m+1} est vraie, c'est à dire $u_{m+1} = 2^{m+1} + m+1$ 1,5

$$\text{On a } u_{m+1} = 2u_m - m + 1$$

$$\stackrel{H.R}{=} 2(2^m + m) - m + 1$$

$$= 2 \times 2^m + 2m - m + 1$$

$$= 2^{m+1} + m + 1$$

vrai au rang $(m+1)$

2

Conclusion : la propriété est vraie pour $m=0$, elle est héréditaire
Donc P_m est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$. 9,5