

Correction du deu m2 - Tspé maths

Ex 1: 1) $u_m = -m^2 + 3m + 5 \quad (m \in \mathbb{N})$

16

$$u_m = m^2 \left(-1 + \frac{3}{m} + \frac{5}{m^2} \right) \text{ pour } m \neq 0$$

Par somme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{3}{m} + \frac{5}{m^2} \right) = -1$ et $\lim_{m \rightarrow +\infty} m^2 = +\infty$

Par produit $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = -\infty$

2) $v_m = \frac{(-1)^m}{m^2} \quad (m \in \mathbb{N}^*)$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{m^2} \leq v_m \leq \frac{1}{m^2} \quad (m^2 > 0)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m^2} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m^2} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m = 0$

3) $w_m = 3^m - 5^m \quad (m \in \mathbb{N})$ $w_m = 3^m \left(1 - \frac{5^m}{3^m} \right) = 3^m \left(1 - \left(\frac{5}{3} \right)^m \right)$

$3 > 1$ et $5/3 > 1$ donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} 3^m = +\infty$

et par somme $\lim_{m \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{5}{3} \right)^m = -\infty$

Par produit $\lim_{m \rightarrow +\infty} w_m = -\infty$

Ex 2: $u_0 = 0$
1/5 $\left\{ \begin{array}{l} u_{m+1} = \frac{-u_m - 4}{u_m + 3} \end{array} \right. \quad (m \in \mathbb{N})$

$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}$ sur $] -3; +\infty[$
9,5

1) D'après le graphique, il semble que (u_m) soit décroissante et convergente vers -2

2) $u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{-4}{3}$ et $u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \frac{\frac{4}{3} - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \frac{-8/3}{5/3} = \frac{-8}{5}$

3) algo

4) $f'(x) = \frac{-1 \times (x+3) - (-x-4) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2}$ $f'(x) > 0$
1,5

donc f strictement croissante sur $] -3; +\infty[$

5) on veut montrer que $-2 < u_{m+1} \leq u_m$ pour $m \in \mathbb{N}$ 9,5

• initialisation : pour $m=0$

$$u_0 = 0 \text{ et } u_1 = \frac{-4}{3}; \text{ on a bien } -2 < u_1 \leq u_0 \quad \checkmark$$

vrai pour $m=0$

• hérédité : soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que

$$-2 < u_{m+1} \leq u_m$$

2, f strictement croissante sur $J-3; +\infty[$
donc sur $[-2; +\infty[$

alors $f(-2) < f(u_{m+1}) \leq f(u_m)$ d'où 2,5
 $f(-2) = -2 \quad \quad \quad -2 < u_{m+2} \leq u_{m+1}$

vrai au rang $(m+1)$

• conclusion : on a montré par récurrence 9,25
que $\boxed{-2 < u_{m+1} \leq u_m}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$

6) d'après la question précédente, $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$
est décroissante et minorée par -2
Par théorème (u_m) converge 1

7) $\boxed{v_m = \frac{1}{u_m + 2}} \quad (m \in \mathbb{N})$

a) $v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{2}$ 9,5

b) $v_{m+1} = \frac{1}{u_{m+1} + 2} = \frac{1}{\frac{-u_m - 4}{u_m + 3} + 2}$

donc $v_{m+1} = \frac{1}{\frac{-u_m - 4 + 2u_m + 6}{u_m + 3}} = \frac{u_m + 3}{u_m + 2}$

et $v_{m+1} - v_m = \frac{u_m + 3}{u_m + 2} - \frac{1}{u_m + 2} = \frac{u_m + 2}{u_m + 2} = 1$ 2

(v_m) est donc une suite arithmétique de raison 1
de 1er terme $v_0 = 1/2$ 9,5

$$\begin{aligned}
 \textcircled{c} \quad & \left\{ \begin{aligned} v_n &= v_0 + n \times \pi = \frac{1}{2} + n = \frac{1+2n}{2} \\ v_n &= \frac{1}{u_n + 2} \Leftrightarrow \frac{1}{v_n} = u_n + 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} - 2 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

2/5

$$\text{alors } u_n = \frac{2}{1+2n} - 2 = \frac{1}{0,5+n} - 2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\textcircled{d} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,5+n) = +\infty$$

Par quotient et somme

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2}$$

1

Ex 3 (Bonus)

1) $P_m = m^2 - 42m + 4 \quad (m \in \mathbb{N})$

$P_m = f(m)$ avec $f(x) = x^2 - 42x + 4$ sur $[0; +\infty[$

$f'(x) = 2x - 42$

x	0	21	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

f strictement décroissante sur $[0; 21]$ puis croissante sur $[21; +\infty[$

$P_0 = -436$

$P_{21} = -437$

$P_{22} = -436$

donc (P_m) est croissante à partir de $m=21$

2) $(a \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \sqrt{u_n^2 + 8} \end{cases} \quad \begin{matrix} v_n = u_n^2 - 1 \\ (n \in \mathbb{N}) \end{matrix}$

Vrai $v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{9}(u_n^2 + 8) - 1 = \frac{1}{9}u_n^2 + \frac{8}{9} - \frac{9}{9}$
 $= \frac{1}{9}u_n^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(u_n^2 - 1) = \frac{1}{9}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $1/9$
 de premier terme $v_0 = a^2 - 1$

3) $m^2 \leq (m+1)^2 \Leftrightarrow m \leq m^2 + m \quad (m \in \mathbb{N})$

$(\Rightarrow) \frac{m^2}{(m+1)^2} \leq \omega_m \leq \frac{m^2 + m}{(m+1)^2} \quad (\text{ou } \frac{m(m+1)}{(m+1)^2} = \frac{m}{m+1})$ Vrai

$\left\{ \begin{aligned} \frac{m^2}{(m+1)^2} &= \frac{m^2}{m^2 + 2m + 1} = \frac{m^2 \times 1}{m^2 \times (1 + \frac{2}{m} + \frac{1}{m^2})} = \frac{1}{1 + 2/m + 1/m^2} \\ \frac{m^2 + m}{(m+1)^2} &= \frac{m^2 + m}{m^2 + 2m + 1} = \frac{m^2(1 + 1/m)}{m^2(1 + 2/m + 1/m^2)} = \frac{1 + 1/m}{1 + 2/m + 1/m^2} \end{aligned} \right.$

Par Somme et produit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m^2}{(m+1)^2} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m^2 + m}{(m+1)^2} = 1$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_m = 1$ donc CV.