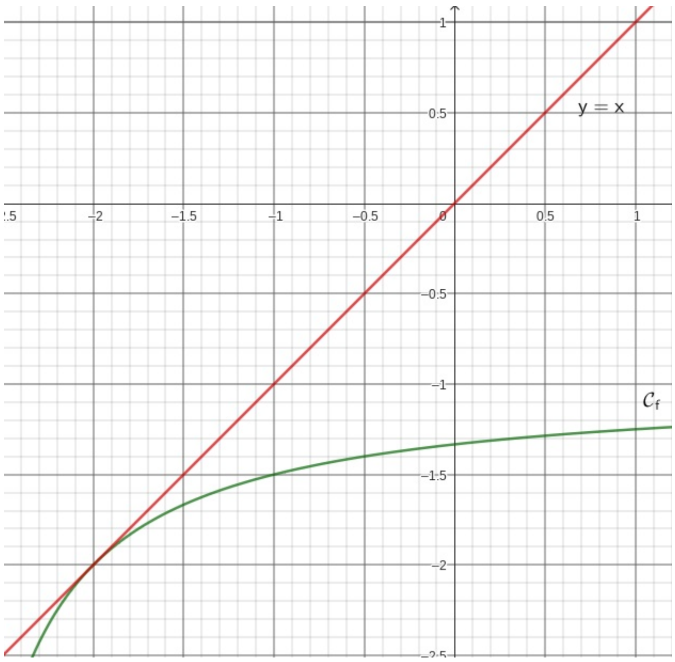
# Devoir n°2 - Suites - TSpé maths

5 octobre 2023 - 55 min

**Exercice 1 (15 pts)** : On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3} \quad \text{(pour tout entier naturel } n\text{)} \end{cases}$$

et la fonction $f$ définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$.
Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.




1. On donne $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la fonction $f$, et la droite $D$ d'équation $y = x$. Placer sur l'axe des abscisses les termes $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $u_3$.

   Quelles conjectures peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite $(u_n)$ quand $n$ tend vers l'infini ?

2. Calculer les valeurs exactes de $u_1$ et $u_2$.
3. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
       u = ...
    return(u)
```

   On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que $i$ varie de 0 à $n - 1$.

   Compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel $n$, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de $u_n$.

4. Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ : $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$
6. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
7. Soit la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$

   a) Donner $v_0$.

   b) Démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 1.

   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$ : $u_n = \dfrac{1}{n + 0,5} - 2$

   d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Exercice 2 (5 pts) :** Déterminer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = -n^2 + 3n + 5$ $(n \in \mathbb{N})$
2. $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
3. $w_n = 3^n - 5^n$ $(n \in \mathbb{N})$

**Exercice 3 (Bonus) :** Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. On considère la suite $(p_n)$ définie pour tout entier naturel $n$, par :

$$p_n = n^2 - 42n + 4$$

**Affirmation 1** : La suite $(p_n)$ est strictement décroissante.

2. Soit $a$ un nombre réel. On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :
   - $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{u_n^2 + 8}$
   - $v_n = u_n^2 - 1$ pour tout entier naturel $n$

**Affirmation 2** : La suite $(v_n)$ est une suite géométrique.

3. On considère une suite $(w_n)$ qui vérifie, pour tout entier naturel $n$,

$$n^2 \leqslant (n+1)^2 w_n \leqslant n^2 + n$$

**Affirmation 3** : La suite $(w_n)$ converge.