

Correction du deu 4 - TS¹

Ex 1 : $f_1(x) = \frac{-3x+4x^3}{3x^3+x-3}$; en $(-\infty)$

(16)

$$f_1(x) = \frac{x^3(-3/x^2+4)}{x^3(3+1/x^2-3/x^3)} = \frac{4-3/x^2}{3+1/x^2-3/x^3}$$

pour $x \neq 0$

Par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - \frac{3}{x^2}) = 4$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}) = 3$

Par quotient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \frac{4}{3}$

La droite d'équation $y = \frac{4}{3}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ en $-\infty$

2

• $f_2(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}$; en $+\infty$ ($x > -1/2$)

$$f_2(x) = (\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}) \times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+1}}$$

pour $x \neq -1/2$

$$= \frac{(2x+3) - (2x+1)}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+1}} = \frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+1}}$$

Par composition et somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+1}) = +\infty$

Par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0$

2

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_2$ en $+\infty$

• $f_3(x) = \frac{2\sin(x) + x + 1}{x}$; en $-\infty$

2

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$

$\Rightarrow -2 \leq 2\sin(x) \leq 2$

$\Rightarrow -2 + x + 1 \leq 2\sin(x) + x + 1 \leq 2 + x + 1$

$\Rightarrow x - 1 \leq 2\sin(x) + x + 1 \leq x + 3$ Par Encadrement

$\Rightarrow \frac{x-1}{x} \leq f_3(x) \leq \frac{x+3}{x}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_3(x) = 1$

$\Rightarrow 1 + \frac{3}{x} \leq f_3(x) \leq 1 - \frac{1}{x}$ la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_3$ en $-\infty$

Ex 2 : $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{m+1} = \frac{6u_m + 2}{u_m + 5} \quad (m \in \mathbb{N}) \end{cases}$ 1) $u_1 = \frac{6u_0 + 2}{u_0 + 5} = \frac{48 + 2}{8 + 5} = \frac{50}{13}$ 9.5

2) $f(x) = \frac{6x+2}{x+5}$ sur $[0; +\infty[$; $u_{m+1} = f(u_m)$ ($m \in \mathbb{N}$)

a) $f'(x) = \frac{6(x+5) - (6x+2) \times 1}{(x+5)^2} = \frac{28}{(x+5)^2}$ 4.5

$f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b) on veut montrer que $u_m > 2$ pour $m \in \mathbb{N}$

initialisation : pour $m=0$ $u_0 = 8$ $8 > 2$ vrai pour $m=0$

hérédité : soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_m > 2$

f strictement croissante sur $[0; +\infty[$

donc $f(u_m) > f(2)$ $\begin{cases} f(u_m) = u_{m+1} \\ f(2) = 2 \end{cases}$

donc $u_{m+1} > 2$ 2

vrai au rang $(m+1)$

conclusion : par principe de récurrence, $u_m > 2$ pour tout $m \in \mathbb{N}$

3) on admet que $u_{m+1} - u_m = \frac{(2-u_m)(u_m+1)}{(u_m+5)}$ ($m \in \mathbb{N}$)

a) $u_m > 2$ donc $\begin{cases} u_{m+1} > 3 > 0 \\ u_m + 5 > 7 > 0 \\ 2 - u_m < 0 \end{cases}$ on a donc $u_{m+1} - u_m < 0$ (u_m) est décroissante 1

b) (u_m) est décroissante minorée par 2, 9.75

Par théorème (u_m) converge

4) $v_m = \frac{u_m - 2}{u_m + 1}$ ($m \in \mathbb{N}$) a) $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 9.5

b) $\begin{cases} u_{m+1} - 2 = \frac{6u_m + 2}{u_m + 5} - 2 = \frac{4u_m - 8}{u_m + 5} = 4 \left(\frac{u_m - 2}{u_m + 5} \right) \\ u_{m+1} + 1 = \frac{6u_m + 2}{u_m + 5} + 1 = \frac{7u_m + 7}{u_m + 5} = 7 \left(\frac{u_m + 1}{u_m + 5} \right) \end{cases}$ 4.5

$v_{m+1} = \frac{u_{m+1} - 2}{u_{m+1} + 1} = 4 \left(\frac{u_m - 2}{u_m + 5} \right) \times \frac{u_m + 5}{7(u_m + 1)} = \frac{4}{7} \times \frac{u_m - 2}{u_m + 1} = \frac{4}{7} v_m$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{7}$
de 1er terme $v_0 = \frac{2}{3}$ 0,75 0,75

c) alors $v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

$-1 < \frac{4}{7} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ par produit 1,5

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \Leftrightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 2$

$\Leftrightarrow v_n u_n + v_n = u_n - 2$

$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 2$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{2 + v_n}{1 - v_n}$ 1

Par somme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + v_n) = 2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) = 1$

Par quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ 0,75

5) 1 Le programme renvoie la valeur 14

$u_{13} > 2,001$

$u_{14} < 2,001$

le plus petit n tel

tel que $u_n < \underline{2,001}$

Ex 3: Partie A: $f(x) = (x+1)e^x$ définie dérivable sur $\mathbb{R}$

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ } Par produit
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ } $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 0,75

$f(x) = xe^x + e^x$ Par coïncidences comparées $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 1,25

2) $f'(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$ 0,75

3) $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(x+2)$ 0,5

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e^2}$	$+\infty$

$f(-2) = -e^{-2}$

0,75

(1/4)

Partie B: $g_m(x) = x+1 - me^{-x}$, sur $\mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$)

1) a) $g_m(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = me^{-x} \Leftrightarrow (x+1)e^x = me^{-x}e^x$
 $\Leftrightarrow f(x) = m$

b) D'après le tableau de variations de f

- $m < -\frac{1}{e^2}$, pas de points d'intersection
- $m = -\frac{1}{e^2}$, $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un seul point
- $-\frac{1}{e^2} < m < 0$, deux points d'intersection
- $m \geq 0$, un seul point d'intersection

$$2) \quad \frac{g_m(x) - (x+1)}{e^{-x}} > 0 \text{ sur } \mathbb{R} \quad \frac{g_m(x) - (x+1)}{e^{-x}} = x+1 - m e^{-x} - (x+1) = -m e^{-x}$$

du signe de $(-m)$

m	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_m(x) - (x+1)$	$+$	0	$-$

pour $m \leq 0$

$g_m(x) \geq (x+1) : \mathcal{L}_m$ est au-dessus de $\mathcal{D}$

pour $m > 0$

$g_m(x) < (x+1) : \mathcal{L}_m$ est au-dessous de $\mathcal{D}$