

Devoir n°4 - Suites et Fonctions - TS

25 octobre 2023 - 1h20 min

Exercice 1 (5 pts) : Déterminer la limite de chaque fonction à l'endroit indiqué, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$$f_1(x) = \frac{-3x + 4x^3}{3x^3 + x - 3}; \text{ en } -\infty$$

$$f_2(x) = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+1}; \text{ en } +\infty$$

$$f_3(x) = \frac{2\sin(x) + x + 1}{x}; \text{ en } -\infty$$

Exercice 2 (12 pts) : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1 .

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{6x+2}{x+5}$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}$$

a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

a) Calculer v_0 .

b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

c) Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n) .

En déduire la limite de (u_n) .

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande seuil(2.001) puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil (A) :  
    n = 0  
    u = 8  
    while u > A :  
        u = (6*u + 2)/(u + 5)  
        n = n + 1  
    return n
```

Exercice 3 (4 pts) : Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A : Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)e^x$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer f' la fonction dérivée de la fonction f .
3. Dresser le tableau de variations de f .

Partie B (Bonus) : On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par $g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$.

et on note C_m la courbe de la fonction g_m dans un repère du plan.

1. a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si, et seulement si, $f(x) = m$.
b) Dédire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe C_m avec l'axe des abscisses en fonction de m .
2. Etudier la position relative de la courbe C_m par rapport à la droite D d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs de m .